

Examen Partiel

Durée : 2 heures.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.*

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, dire, en le justifiant, si la famille considérée est libre dans $\mathbb{R}^3$ et/ou génératrice de $\mathbb{R}^3$.

1. (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$;
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$;
3. (w_1, w_2, w_3, w_4) avec $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (1, 1, 0)$, $w_4 = (2, -1, -1)$.

Exercice 2.

Soient E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $f : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$\begin{cases} f(n) = 2n - 1, & \text{si } 1 \leq n \leq 3, \\ f(n) = 7 - n, & \text{si } 4 \leq n \leq 6. \end{cases}$$

1. Calculer $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$.
2. Déterminer $f(\{2, 4, 6\})$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{3, 4, 5\})$.
4. L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
5. L'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $1 + 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z - 2i = 0.$$

Exercice 4.

1. Donner sous formes exponentielles et cartésiennes les racines cubiques complexes de $27i$.
2. À l'aide du binôme de Newton, développer l'expression $(iz + 1)^3$.
3. En utilisant les questions précédentes, donner sous forme algébrique les solutions complexes de l'équation

$$iz^3 + 3z^2 - 3iz - 1 + 27i = 0.$$

On définit les applications f, g et h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = z^3, \quad g(z) = iz + 1 \quad \text{et} \quad h(z) = f \circ g(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. Quelle est la nature géométrique de l'application g ? Déterminer son centre si g est une rotation ou une homothétie.
5. (a) Représenter graphiquement le triangle T_1 dont les sommets sont les points de $f^{-1}(\{27i\})$.
(b) On note T_2 le triangle dont les sommets sont les points de $h^{-1}(\{27i\})$. Par quelle transformation du plan T_2 est-il obtenu à partir de T_1 ?
(c) Représenter graphiquement le triangle T_2 en utilisant (a) et (b).
6. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{C}$ défini par $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}\}$. Déterminer $g(D)$, l'image directe de D par g et $h(D)$, l'image directe de D par h . Représenter graphiquement D , $g(D)$ et $h(D)$.