Université Paris-Diderot — Année 2015-2016
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes sections

Examen du 17 Décembre 2015

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\}$. Soit $H : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $H(z) = \dfrac{2z-4}{\mathrm{i}z-2}$.

(a) Montrer que $H(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.
(b) Calculer $H \circ H(z)$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.
(c) En déduire que $H : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est bijective.
(d) Déterminer les points fixes de H, c'est-à-dire les éléments z de $\mathcal{D}$ tels que $H(z) = z$.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2z - t = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
(b) Donner une base $\mathcal{B}$ de F. Quelle est la dimension de F ?
(c) Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.
(d) Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 3), \quad v_3 = (1, 1, 2, 3)$$

appartiennent à F.
(e) Montrer que ces vecteurs forment une base de F.

Les points précédents impliquent que tout vecteur $v \in F$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels. Les valeurs $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont appelées les *coordonnées* de v par rapport à la base (v_1, v_2, v_3).

(f) Soit $v = (-3, 1, 3, 1)$. Montrer que $v \in F$, et déterminer les coordonnées de v par rapport à la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 3. Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

(a) Donner la définition d'un *minorant* de E.
(b) Donner la définition de *borne inférieure* de E.

Soit maintenant $E = \left\{ \dfrac{1}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) Donner les valeurs de $\inf E$ et $\sup E$ (sans le justifier).
(d) Montrer, en utilisant la définition de borne inférieure, que la valeur de $\inf E$ est bien celle donnée au point précédent.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+x^2}}{\cos(\pi x)+2}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|\,(1+x)}{\sqrt{x^2+x^4}}$, (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}(x^2-x)$.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{2}.$$

(a) Justifier que f est une fonction continue et dérivable.

(b) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f.

(c) Que valent $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{3})$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{3})$?

(d) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I = [0,1]$.

(e) Calculer l'image directe $J = f(I)$ de I par f.

On désigne par $g : I \to J$ la fonction définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

(f) Déduire des points précédents que $g : I \to J$ est bijective.

On note $g^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque de g.

(g) Soit $y_0 = \frac{1}{4}$. Montrer que $y_0 \in J$. Montrer que g^{-1} est dérivable en y_0. Calculer $(g^{-1})'(y_0)$. (*Indication* : il n'est pas nécessaire de calculer explicitement l'expression de g^{-1}.)

Questions bonus.

On définit la fonction h par

$$\begin{array}{rccl} h: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

(h) Montrer que h est continue à droite en 0 (on pourra utiliser la définition de dérivabilité de f en 0).

(i) Montrer que h est continue sur I. En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que $h(x) \leq h(c)$ pour tout $x \in I$.