

Examen de seconde session du 22 Juin 2015 Version 3

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.

On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Donner l'ensemble des racines cubiques (ou troisièmes) de l'unité, c'est à dire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ sous forme exponentielle et sous forme cartésienne.

Dans la suite on désigne par j la racine cubique dont la partie imaginaire est strictement positive. Soient $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ les applications définies par $f(z) = jz$ et $g(z) = -z$.

2. Déterminer la nature géométrique de l'application f . Montrer qu'elle est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque f^{-1} et déterminer la nature géométrique de l'application f^{-1} .
3. Déterminer la nature géométrique de l'application g . Montrer qu'elle est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque g^{-1} et déterminer la nature géométrique de l'application g^{-1} .
4. On définit le sous-ensemble X de $\mathbb{C}$ par $X = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = |z|^3\}$
 - (a) Etudier, la stabilité ou non du sous-ensemble X pour chacune des applications f, g, f^{-1}, g^{-1} . (On rappelle que, par définition, une partie A d'un ensemble E est stable par une application $\varphi : E \rightarrow E$ si $\varphi(A) \subset A$).
 - (b) Dessiner l'ensemble X dans le plan complexe.

Exercice 2.

1. Soient a, b et c trois nombres réels.

Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système $(E_{(a,b,c)})$
$$\begin{cases} 2x + y & = a \\ 3x + y + z & = b \\ y + z & = c \end{cases}$$

2. On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En justifiant soigneusement votre réponse, dire si la famille (v_1, v_2, v_3)

- est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$;
- est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$;
- est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

Soient $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et H_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 avec

$$v_1 = (1, 1, 1, 3), v_2 = (3, -1, 1, 3), v_3 = (3, 2, 1, 6), v_4 = (1, -1, 1, 1).$$

1. Montrer que H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Calculer sa dimension et en donner une base.
2. Déterminer un système d'équations linéaires définissant le sous-espace vectoriel H_2 . En déduire la dimension de H_2 et donner une base de H_2 .
3. À l'aide de la question précédente, calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$, et en donner une base.
4. (a) Trouver deux vecteurs u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^4$ tels que :
 - on ait $u_1 \in H_1$ et $u_1 \notin H_2$;
 - on ait $u_2 \in H_2$ et $u_2 \notin H_1$;
 (b) On pose $u = u_1 + u_2$. A-t-on $u \in H_1$? A-t-on $u \in H_2$?
 (c) Le sous-ensemble $H_1 \cup H_2$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Exercice 4. On considère la fonction définie de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité au point 1.

On note désormais g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui prolonge f par continuité.

3. Justifier soigneusement que la fonction g est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Calculer la dérivée de la fonction g sur chacun de ces intervalles.
4. Étudier la dérivabilité de la fonction g au point 1.
5. On note $f_{]-\infty, 0[}$ la restriction de la fonction g à l'intervalle $]-\infty, 0[$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f_{]-\infty, 0[}$.
6. Déterminer l'image directe $J = f_{]-\infty, 0[}([-\infty, 0[)$ de l'intervalle $]-\infty, 0[$ par $f_{]-\infty, 0[}$.
7. Montrer que la fonction $\tilde{f} :]-\infty, 0[\rightarrow J$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x < 0$ est bijective.
8. Soit h la bijection réciproque de $\tilde{f}$. Montrer que h est continue et dérivable sur son domaine de définition et déterminer son tableau de variations.
9. Calculer $h'(-\frac{2\ln 2}{3})$, la dérivée de h au point $-\frac{2\ln 2}{3}$.