SECTION B (Cours : B. Gentou)
Partiel du 20 octobre 2012

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$3z^2 + (1 - 4i)z - 1 - i = 0.$$

exercice 2.

1. A l'aide des nombres complexes, établir les formules de l'angle double (où $\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1, \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta \cos\theta.$$

2. A l'aide de l'exponentielle complexe, exprimer $\sin^5\theta$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) comme une somme de termes en $\sin(p\theta)$ avec p entier, c.a.d. linéariser $\sin^5\theta$.

exercice 3.

On considère le polynôme

$$P(X) = 3x^5 - 5x^4 + 5x - 3.$$

1. Donner la définition d'une racine de multiplicité $m \geq 1$ de P .
2. Montrer que 1 est racine de P et calculer sa multiplicité m .
3. Calculer le quotient de la division de $P(x)$ par $(x - 1)^m$.
4. Donner toutes les racines complexes de P avec leur multiplicité puis donner une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

exercice 4.

1. Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner les définitions de l'injectivité puis de la surjectivité de f .
2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ surjective et non injective. Tracer l'allure de f .
Justifier qu'elle est non injective.
3. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ injective et non surjective. Tracer l'allure de f .
Justifier qu'elle est non surjective.
4. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ni injective, ni surjective. Tracer l'allure de f .
Justifier qu'elle est non injective et non surjective.

Remarque : on prendra garde à bien respecter les ensembles de départ et d'arrivée.

(suite au dos .../...)

exercice 5.

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Donner les définitions des ensembles suivants puis déterminer les, en résolvant des équations :

$$f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right), \quad f^{-1}(\{0\}).$$

2. Etudier les variations de f et résumer les dans un tableau.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier votre réponse.
4. A l'aide de la question 2, donner sans démonstration les ensembles suivants :

$$f([1, 2]), \quad f([-1, 2]), \quad f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right).$$

exercice 6.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E_1 d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1 - z^5 = 0.$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation E_2 :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

Indication : montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 1 - z^5$.

3. On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ puis $S = u + u^2$ et $T = u^3 + u^4$.
Calculer $S + T$, puis montrer que S et T sont conjugués et en déduire la valeur de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

4. En utilisant les formules de l'exercice 2 (question 1), déduire de la question précédente que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme

$$P(x) = 2x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

5. Déterminer une expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en fonction de $\sqrt{5}$.