Université Paris 7 **2012-2013**
MM1 Section D

Corrigé du partiel du 20 Octobre 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices sont indépendants. Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument précis et juste. Le barème est donné à titre indicatif. Les calculettes et téléphones sont interdits. Remarque : les différentes questions peuvent être abordées dans n'importe quel ordre.

***Exercice* 1 :** (**Question de cours**) : Donner la définition de l'injectivité et de la surjectivité d'une application.

Réponse — Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est **injective** si tout élément dans l'espace d'arrivée admet **au plus** un antécédent : $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

f est **surjective** si tout élément dans l'espace d'arrivée admet **au moins** un antécédent : $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$.

***Exercice* 2 :**

1. Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. On note $A^c = E \setminus A$. Montrer que :

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap C) \cup (A \cap B) = A \cup B \cup C.$$

Réponse — Plusieurs solutions étaient possible. L'une d'elle consiste à utiliser la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection et des propriétés du type $B \cup B^c = E$. Notons $X := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (B^c \cap C) \cup (A \cap B)$. On a alors d'abord, en regroupant d'abord les premier et quatrième termes :

$$\begin{array}{rcllll} X & = & (A \cap B^c) & \cup(A^c \cap B) & \cup(B^c \cap C) & \cup(A \cap B) \\ & = & [A \cap (B^c \cup B)] & \cup(A^c \cap B) & \cup(B^c \cap C) & \\ & = & A & \cup(A^c \cap B) & \cup(B^c \cap C) & \end{array}$$

Puis

$$\begin{array}{rcrl} X & = & [(A \cup A^c) \cap (A \cup B)] & \cup(B^c \cap C) \\ & = & (A \cup B) & \cup(B^c \cap C) \\ & = & A & \cup[B \cup (B^c \cap C)] \\ & = & A & \cup[(B \cup B^c) \cap (B \cup C)] \\ & = & A & \cup(B \cup C) \end{array}$$

Remarque : On pouvait tout aussi bien commencer en regroupant les premiers et troisièmes termes d'une part (en y factorisant B^c) et les deuxième et quatrième termes d'autre part (en y factorisant B). Un dessin pouvait aussi convenir, à condition d'être fait soigneusement.
Attention ! *il est important de bien mettre les parenthèses au bon endroit, comme le montre l'exercice qui suit.*

2. Trouver trois ensembles A, B et C tels que : $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.
Réponse — Là aussi, beaucoup de solutions étaient possibles. Il suffisait essentiellement de trouver A, B et C tels que $C \cap A^c \neq \emptyset$. En effet on a toujours $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (A \cap B) \cup C$ (le premier ensemble contient le

deuxième) et la "différence" entre les deux ensembles est $C \cap A^c$. Un exemple est donc

$$A = \{1\}, \quad B = \{1\}, \quad C = \{2\}.$$

Alors $A \cap B = \{1\}$, donc $(A \cap B) \cup C = \{1, 2\}$,
et $B \cup C = \{1, 2\}$, donc $A \cap (B \cup C) = \{1\}$.

***Exercice* 3 :**

1. Trouver 4 couples (A, B) d'intervalles de $\mathbb{R}$, tels que les applications $f : A \to B$ avec $f(x) = x^2$ soient respectivement:
   Attention ! *il fallait bien s'assurer que $f(A)$ était contenu dans B, sans quoi l'application $f : A \to B$ n'était pas définie !*

   i) injective mais pas surjective.
   Réponse — Un exemple est $A = [0, a[$ et $B =]-a^2, a^2[$, pour n'importe quelle valeur de $a > 0$ (et aussi pour $a = +\infty$). Alors f est bien injectif, mais n'est pas surjectif, car $f(A) = [0, a^2[$.

   ii) surjective mais pas injective.
   Réponse — Un exemple est $A =]-a, a[$ et $B = [0, a^2[$, pour n'importe quelle valeur de $a > 0$ (et aussi pour $a = +\infty$). Alors f n'est pas injectif, car $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in]-a, a[$, mais est surjectif, car $f(A) = [0, a^2[$.

   iii) bijective.
   Réponse — Un exemple est $A = [0, a[$ et $B = [0, a^2[$, pour n'importe quelle valeur de $a > 0$ (et aussi pour $a = +\infty$).

2. On considère maintenant l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$. Pour chacune des conditions suivantes, trouver un intervalle A qui la vérifie.

   a) $f^{-1}[f(A)] \neq A$.
   Réponse — $A = [0, +\infty[$, $f(A) = [0, +\infty[$, $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R}$.

   b) $f[f^{-1}(A)] \neq A$.
   Réponse — $A = \mathbb{R}$, $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$, $f(f^{-1}(A)) = [0, +\infty[$.

   c) $f[f^{-1}(A)] = A$.
   Réponse — $A = [0, +\infty[$, $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$, $f(f^{-1}(A)) = [0, +\infty[$.

   d) $f^{-1}[f(A)] = A$.
   Réponse — $A = \mathbb{R}$, $f(A) = [0, +\infty[$, $f^{-1}(f(A)) = \mathbb{R}$.

***Exercice* 4 :** On considère le polynôme $P(X) = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

1. Montrer l'identité $P(X) = (X - 1)^3(3X^2 + 4X + 3)$.
   Réponse — Il s'agissait d'abord de reconnaître que $(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, identité que l'on pouvait soit retrouver directement en développant le terme de gauche, soit en utilisant la formule du binôme. Puis on pouvait soit vérifier l'identité demandée en développant $(X-1)^3(3X^2+4X+3) = (X^3-3X^2+3X-1)(3X^2+4X+3)$, soit faire la division euclidienne de $P(X)$ par X^3-3X^2+3X-1 (on trouvait alors comme quotient $3X^2+4X+3$, avec un reste nul), soit encore la division euclidienne de $P(X)$ par $3X^2+4X+3$ (on trouvait alors comme quotient X^3-3X^2+3X-1, avec un reste nul).

2. Montrer que $(X-1)^4$ ne divise pas P. Donner l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(X)$.
Réponse — La méthode la plus rapide et la plus simple consiste à vérifier que, si l'on note $Q(X) := 3X^2+4X+3$, alors $Q(1) \neq 0$ (ce qui est immédiat : $Q(1) = 10$). En effet on a montré à la question précédente que $P(X) = Q(X)(X-1)^3$. Donc on en déduit que $(X-1)^4$ divise P ssi $X-1$ divise Q. Or un théorème du cours nous dit que cela est vrai ssi $Q(1)$ est nul. Cela établit que l'ordre de la racine 1 ne dépasse pas 4. Donc 1 est racine d'ordre 3 de P.

   Une autre méthode repose sur le résultat suivant : *Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors a est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ ssi $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$, où, pour tout j, $P^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de P.* On pouvait alors calculer P, P', P'' et P''' et vérifier que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P'''(1) \neq 0$.

3. Déterminer toutes les racines du polynôme P puis en donner une factorisation.
Réponse — Nous savons déjà que 1 est racine triple. Les deux autres racines sont celles de $3X^2+4X+3$. Le discriminant[1] de ce polynôme du second degré est

$$\Delta = 16 - 36 = -20 = -(2\sqrt{5})^2 < 0.$$

   Il n'admet donc pas de racine dans $\mathbb{R}$. En revanche il a en dans $\mathbb{C}$, qui sont $\frac{-4+i2\sqrt{5}}{6} = \frac{-2+i\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{-4-i2\sqrt{5}}{6} = \frac{-2-i\sqrt{5}}{3}$. Ainsi les racines de P sont :

$$1 \text{ (racine triple) }, \frac{-2+i\sqrt{5}}{3} \text{ et } \frac{-2-i\sqrt{5}}{3}.$$

Exercice 5 **:** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 - 2X + (1+2i) = 0$.
Réponse — Il s'agit d'un polynôme du second degré à coefficient complexe. Nous calculons son discriminant[2] : $\Delta = 4 - 4(1+2i) = -8i$. Puis nous devons trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (puisque $\Delta \neq 0$, il y a deux solutions à cette équation, si on a l'une, l'autre est forcément l'opposée de la première). Voici une première méthode : on pose $\delta = a+ib$ et on résoud le système $[(a+ib)^2 = \Delta$ et $|a+ib|^2 = |\Delta|]$, c'est à dire :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 0 \\ 2ab &= -8 \\ a^2+b^2 &= 8 \end{cases}$$

On trouve à la fin : $\delta = \pm 2(1-i)$. Une autre méthode est de remarquer que $\Delta = 8e^{-i\pi/2}$ et donc $\delta = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ou $= 2\sqrt{2}e^{-i5\pi/4} = -2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Sachant que $e^{-i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, on retrouvait le résultat.

Enfin il ne reste plus qu'à écrire les racines (*ne pas oublier cette étape !*) :

$$x = \frac{2+2(1-i)}{2} = 2-i, \quad x = \frac{2-2(1-i)}{2} = i.$$

[1] Pour un polynôme du second degré pour lequel le coefficient du monôme de degré un est **pair**, il est commode d'utiliser le *discriminant réduit*: si le polynôme s'écrit $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, le discriminant réduit est $\Delta' = \beta^2 - \alpha\gamma$. Alors, si δ' est un nombre (dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$) tel que que $(\delta')^2 = \Delta'$, les racines sont : $(-\beta \pm \delta')/\alpha$. Dans le cas présent, $\Delta' = 4 - 9 = -5$ et on retrouve évidemment le même résultat.

[2] A nouveau, il était possible d'utiliser le discriminant réduit : $\Delta' = 1 - (1+2i) = -2i = (1-i)^2$ et d'écrire directement les racines $1 \pm (1-i)$.

Exercice 6 **:** On considère l'application $f: \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et discuter suivant les valeurs de a l'équation en z:

$$a = f(z).$$

Réponse — Remarquons que $f(z)$ est défini pour toute valeur de z dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, mais pas pour $z = 1$, car alors le dénominateur de $\frac{z+1}{z-1}$ s'annule. C'est pourquoi on cherche z dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) = a \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{z+1}{z-1} = a \Longleftrightarrow z + 1 = a(z-1) = az - a \\ &\Longleftrightarrow \quad z - az = -a - 1 \Longleftrightarrow (1-a)z = -(a+1). \end{aligned}$$

Deux cas se présentent : soit $a \neq 1$, alors, on peut diviser les deux membres de l'équation par $1 - a$ et on trouve

$$z = \frac{a+1}{a-1} \tag{1}$$

comme **unique solution**; soit $a = 1$ et l'équation obtenue n'a pas de solution.
Attention ! *Il s'agissait de résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ et non dans $\mathbb{R}$, mais on voit que cela ne posait pas de difficulté particulière.*

2. L'application f est-elle injective ? Surjective? Déterminer $f(\mathbb{C}\setminus\{1\})$.
Réponse — Nous avons vu à la question précédente que l'équation $f(z) = a$ a une solution si et seulement si $a \neq 1$. Cela signifie que l'image de f est égale à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, qui est différent de $\mathbb{C}$. Donc f **n'est pas surjective**. Le résultat de la question précédente nous enseigne aussi que, dans le cas où l'équation $f(z) = a$ admet une solution, celle-ci est unique et est donnée par (1). Donc f **est injective**.

3. En déduire que l'application $g: \mathbb{C}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$ définie par:

$$g(z) = f(z), \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$$

est bijective. Déterminer l'application réciproque g^{-1}.
Réponse — La fonction g a le même ensemble de départ et la même expression que f, donc elle est forcément injective. Elle est aussi surjective, puisque son image est $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Donc g est une bijection. Son application réciproque a été déterminée à la première question :

$$\forall a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \quad g^{-1}(a) = \frac{a+1}{a-1}.$$

Exercice 7 **:**

1. Donner sous forme exponentielle toutes les racines cinquièmes de 1.
Réponse — Ce sont les valeurs prises par $e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, lorsque k parcourt l'ensemble des entiers de 0 à 4 :

$$1 = e^{i0}, \quad e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{6\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

Représentées sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$, elles sont situées aux sommets d'un pentagone régulier.

2. On pose $P(X) = X^5 - 1$. Justifier qu'il existe un polynôme $Q(X)$ de degré 4 qu'on déterminera vérifiant $P(X) = (X-1)Q(X)$.

   Soit ξ une racine cinquième de 1 avec ξ différent de 1.
   Réponse — Pour justifier l'existence du polynôme Q, on commence par remarquer que $P(1) = 1$. Donc 1 est une racine de P et un théorème du cours nous dit qu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$. Un autre théorème du cours nous dit aussi que $\deg P = \deg(X-1) + \deg Q = 1 + \deg Q$. Donc, comme $\deg P = 5$, $\deg Q = 4$.

   Pour déterminer Q, on pouvait soit se souvenir du cours qui nous enseigne l'identité $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i$ et l'appliquer avec $n = 5$, $a = x$ et $b = 1$; soit faire la division euclidienne de $X^5 - 1$ par $X - 1$ et retrouver ainsi le même résultat :

$$Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

3. Justifier que $P(\xi) = 0$ et déduire de ce qui précède que

$$\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0.$$

   Réponse — Puisque ξ est une racine cinquième de l'unité, il est immédiat que $\xi^5 = 1$ et donc que $P(\xi) = 1$. D'après la question précédente, on en déduit que

$$(\xi - 1)Q(\xi) = 0.$$

   Mais comme on suppose en plus que ξ est différent de 1, $(\xi - 1) \neq 0$, et donc la relation précédente a lieu si et seulement si $Q(\xi) = 0$.

4. En divisant cette dernière égalité par ξ^2, en tirer que $(\xi + \frac{1}{\xi})^2 + (\xi + \frac{1}{\xi}) - 1 = 0$.
   Réponse — Nul besoin ici de poser une division euclidienne de polynôme. Il suffisait de partir du résultat de la question précédente, à savoir que toute racine cinquième de l'unité différente de 1 est solution de $\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$ et de diviser le membre de gauche de cette équation par ξ^2 (ce qui est toujours possible, puisque les racines cinquièmes de l'unité sont non nulles). On obtenait alors

$$\xi^2 + \xi + 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} = 0.$$

   Les premier et dernier termes se regroupent sous la forme :

$$\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} = \xi^2 + 2 + \frac{1}{\xi^2} - 2 = \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 - 2.$$

   Donc l'équation sur ξ devient

$$0 = \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 - 2 + \xi + 1 + \frac{1}{\xi} = \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 + \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) - 1.$$

5. Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
   Réponse — Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5$. Les racines sont donc

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. En considérant la racine cinquième $\xi = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, en conclure que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Réponse — D'après la question 1, nous savons que ξ est une racine cinquième de l'unité, qui est manifestement différente de 1. Donc d'après la question 3, ξ est solution de $\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$. D'après la question 4, cela équivaut à dire que $x := \xi + \frac{1}{\xi}$ est solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ et donc, d'après la question 5, que $\xi + \frac{1}{\xi} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or on déduit de la formule de Moivre que

$$\xi + \frac{1}{\xi} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\frac{2\pi}{5},$$

donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Comme par ailleurs $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, on a : $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et cela exclue que $\cos\frac{2\pi}{5}$ soit égal à $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, car cette dernière quantité est négative. Donc $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (quantité qui est bien positive, car $\sqrt{5} > 1$).

7. (Bonus) En déduire qu'en utilisant uniquement une règle (non graduée) et un compas on peut dessiner l'angle $\frac{2\pi}{5}$.
Réponse — La difficulté essentielle est, étant donnée une unité de longueur fixée sur le dessin, de construire géométriquement la longueur $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{5}/4$. La méthode qui suit repose sur la construction d'un triangle rectangle dont les petits côtés ont pour longueur $1/4$ et $1/2$. Alors l'hypothénuse de ce triangle a pour longueur $\sqrt{5}/4$.

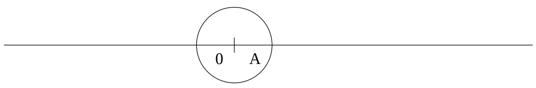

Figure 1: On trace une droite passant par un point 0 et un cercle centré en 0. On note A un point d'intersection entre la droite et le cercle. On convient que le rayon de ce cercle vaut un quart d'une unité de longueur.

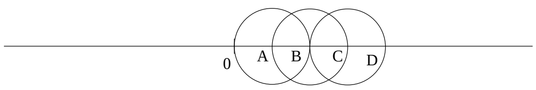

Figure 2: On reporte trois fois au compas 1/4 d'unité de longueur et on construit ainsi les points B, C et D régulièrement espacés d'un 1/4 d'unité de longueur

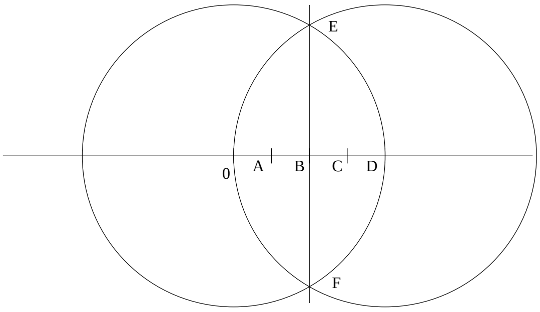

Figure 3: On trace les cercles de centre 0 et de centre D et de même rayon, égal à 1 unité de longueur. On note E et F les deux points d'intersection entre ces deux cercles. On trace la droite passant par ces deux points : on remarque qu'elle passe par B. On vient de tracer la droite passant par B et orthogonale à la droite passant par O et D.

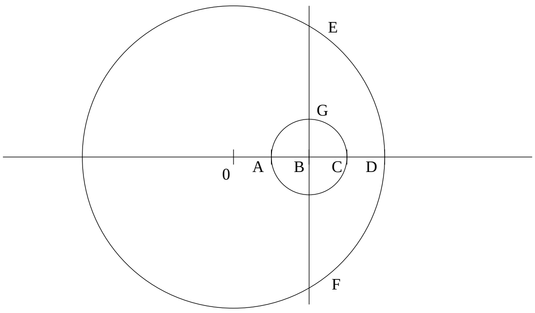

Figure 4: On trace le cercle de centre B et de rayon 1/4 d'unité de longueur (c'est aussi le cercle de diamètre AC). On note G l'un des points d'intersection de ce cercle avec la droite passant par E et F.

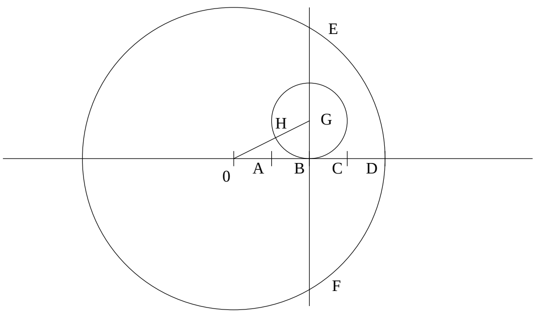

Figure 5: On trace le segment de droite passant par O et par G. En vertu du théorème de Pythagore, ce segment a une longueur égale à $\sqrt{5}/4$. On trace le cercle de centre G et de rayon 1/4 d'unité de longueur. Ce cercle coupe le segment OG en un point H situé à une distance 1/4 de G et donc à une distance égale à $(\sqrt{5}-1)/4$ de O, c'est à dire égale à $\cos \frac{2\pi}{5}$!

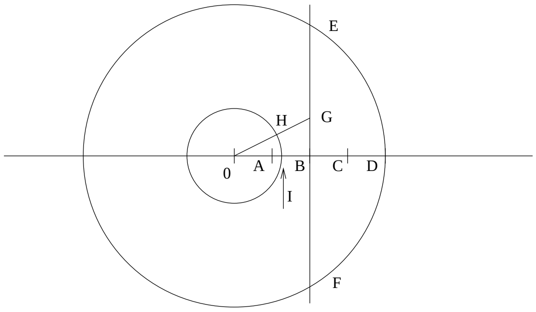

Figure 6: Il nous faut maintenant reporter la longueur du segment OH sur la droite passant par O et D. Pour cela on trace le cercle centré en O passant par H et on note I le point d'intersection de ce cercle avec la droite passant par O et D, situé entre A et B. Nous sommes presque au bout de nos peines : la distance entre O et I est $(\sqrt{5}-1)/4 = \cos\frac{2\pi}{5}$.

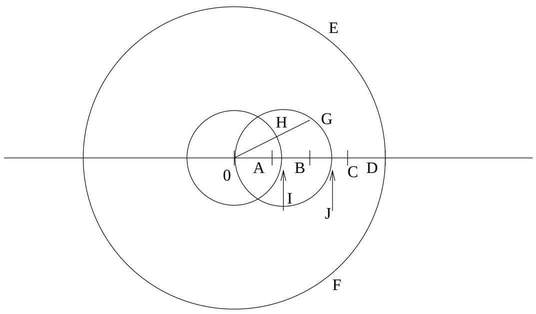

Figure 7: Il ne nous reste plus qu'à tracer la droite passant par le point I et orthogonale à la droite passant par O et D. Celle-ci s'obtient en construisant d'abord le point J, intersection du cercle centré en I et qui a pour rayon la distance OI. Ainsi I est exactement au milieu des points O et J.

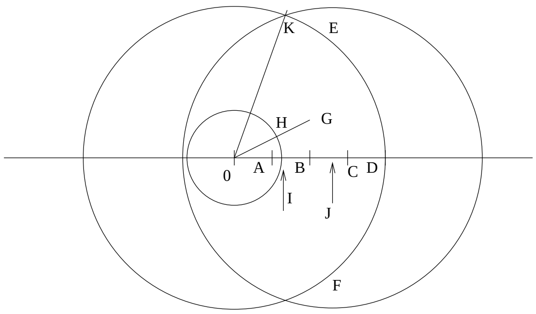

Figure 8: Maintenant nous traçons le cercle de centre J et de rayon une unité. Ce cercle intersecte le cercle unité centré en 0 en deux points situés à la verticale de I, c'est à dire dont l'abscisse vaut $\cos\frac{2\pi}{5}$. Si nous appellons K un de ses points, alors le segment OK forme avec le segment OD un angle égal à $2\pi/5$!