Correction du partiel du 20 octobre 2012

exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$3z^2 + (1 - 4i)z - 1 - i = 0.$$

Correction :

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (1 - 4i)^2 - 4 \cdot 3(-1 - i) = 1 - 16 - 8i + 12 + 12i = -3 + 4i$.

Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x + iy$ avec x et y réels.

On a les équivalences :

$$(x + iy)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont donc $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-1 + 4i + 1 + 2i}{6} = i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1 + 4i - 1 - 2i}{6} = \frac{-1 + i}{3}$$

exercice 2.

1. A l'aide des nombres complexes, établir les formules de l'angle double (où $\theta \in \mathbb{R}$) :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1, \quad \sin(2\theta) = 2\sin\theta \cos\theta.$$

2. A l'aide de l'exponentielle complexe, exprimer $\sin^5\theta$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) comme une somme de termes en $\sin(p\theta)$ avec p entier, c.a.d. linéariser $\sin^5\theta$.

Correction :

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, d'après la formule de Moivre :

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta \sin\theta.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires puis en utilisant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \\ \sin(2\theta) &= 2\cos\theta \sin\theta \end{aligned}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (\text{I})$$

$$\text{Donc } \sin^5\theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^5}{(2i)^5}$$

D'après la formule du binôme de Newton, pour tout x et y dans $\mathbb{C}$, on a :

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

En appliquant cette formule à $x = e^{i\theta}$ et $y = -e^{-i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^5 &= (e^{i\theta})^5 + 5(e^{i\theta})^4(-e^{-i\theta}) + 10(e^{i\theta})^3(-e^{-i\theta})^2 + 10(e^{i\theta})^2(-e^{-i\theta})^3 + 5e^{i\theta}(-e^{-i\theta})^4 \\ &\quad + (-e^{-i\theta})^5 \\ &= e^{i5\theta} - 5e^{i3\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-i3\theta} - e^{-i5\theta} \\ &= e^{i5\theta} - e^{-i5\theta} - 5(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 2i(\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin\theta) \quad \text{d'après (I)} \end{aligned}$$

Comme $(2i)^5 = 2i(2i)^4 = 2i.16$, on en déduit que

$$\sin^5(\theta) = \frac{\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin\theta}{16}.$$

exercice 3.

On considère le polynôme

$$P(X) = 3x^5 - 5x^4 + 5x - 3.$$

1. Donner la définition d'une racine de multiplicité $m \geq 1$ de P.
2. Montrer que 1 est racine de P et calculer sa multiplicité m .
3. Calculer le quotient de la division de P(x) par $(x - 1)^m$.
4. Donner toutes les racines complexes de P avec leur multiplicité puis donner une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction :

1. a est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $(x - a)^m$ divise P et $(x - a)^{m+1}$ ne divise pas P.
2. $P(1) = 3 - 5 + 5 - 3 = 0$ donc 1 est racine de P.
On recherche la multiplicité de 1 comme racine de P en étudiant les dérivées de P.
 $P'(x) = 15x^4 - 20x^3 + 5$, donc $P'(1) = 15 - 20 + 5 = 0$.
 $P''(x) = 60x^3 - 60x^2$, donc $P''(1) = 0$.
Enfin $P^{(3)}(x) = 180x^2 - 120x$, et $P^{(3)}(1) \neq 0$.
On en conclut que 1 est une racine exactement triple de P.

3. D'après la question précédente, on sait que P est divisible par $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
On calcule le quotient Q de la division euclidienne de P par $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 3x^5 - 5x^4 + 5x - 3 \\ \ominus \quad 3x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 3x^2 \\ \hline 4x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 5x - 3 \\ \ominus 4x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 4x \\ \hline 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3 \\ \ominus 3x^3 - 9x^2 + 9x - 3 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \hline Q(x) = 3x^2 + 4x + 3 \end{array} \end{array}$$

Donc $P(x) = (x - 1)^3 Q(x)$ avec $Q(x) = 3x^2 + 4x + 3$.

4. D'après la question précédente : $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0$ ou $Q(x) = 0$.

On recherche donc les racines de Q dans $\mathbb{C}$.

$Q(x) = 3x^2 + 4x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 4 \cdot 9 = -20$ dont les racines carrées dans $\mathbb{C}$ sont $\delta_1 = i2\sqrt{5}$ et $\delta_2 = -i2\sqrt{5}$.

Q a donc pour racines simples $x_1 = \frac{-4 + i2\sqrt{5}}{6} = \frac{-2 + i\sqrt{5}}{3}$ et $x_2 = \frac{-4 - i2\sqrt{5}}{6} = \frac{-2 - i\sqrt{5}}{3}$.

Finalement P a pour racine triple 1, et pour racines simples $x_1 = \frac{-2 + i\sqrt{5}}{3}$ et $x_2 = \frac{-2 - i\sqrt{5}}{3}$.

On en déduit que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(x) = 3(x-1)^3 \left(x + \frac{2 - i\sqrt{5}}{3}\right) \left(x + \frac{2 + i\sqrt{5}}{3}\right)$$

exercice 4.

- Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner les définitions de l'injectivité puis de la surjectivité de f .
- Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ surjective et non injective. Tracer l'allure de f . **Justifier qu'elle est non injective.**
- Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ injective et non surjective. Tracer l'allure de f . **Justifier qu'elle est non surjective.**
- Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ni injective, ni surjective. Tracer l'allure de f . **Justifier qu'elle est non injective et non surjective.**

Remarque : on prendra garde à bien respecter les ensembles de départ et d'arrivée.

Correction :

- f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f .
 f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f .

2. **Remarque :** les allures des courbes ne sont pas dessinées.

Pour respecter les ensembles de départ et d'arrivée, il faut vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \in \mathbb{R}^+$.

On peut choisir les exemples simples suivants pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ surjective et non injective :

Exemple 1 : $f(x) = 0$ pour tout $x < 1$ et $f(x) = x - 1$ pour tout $x \geq 1$.

f est affine par morceaux. f est continue, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, f est surjective.

Elle n'est pas injective car $f(0) = f(1) = 0$

Exemple 2 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = (x-1)^2$

La courbe de f est une translatée horizontale de celle $x \mapsto x^2$. f est continue, $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire, f est surjective.

Elle n'est pas injective car $f(0) = f(2) = 1$

3. **Remarque** : les allures des courbes ne sont pas dessinées.

Pour respecter les ensembles de départ et d'arrivée, il faut vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \in \mathbb{R}^+$.

On peut choisir les exemples simples suivants pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ injective et non surjective :

Exemple 1 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x + 1$.

La courbe de f est une translatée verticale de celle $x \mapsto x$. f est strictement croissante donc injective.

Elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent.

Exemple 2 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^2 + 1$

La courbe de f est une translatée verticale de celle $x \mapsto x^2$. f est strictement croissante donc injective.

Elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent.

Exemple 3 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$

f est strictement croissante donc injective.

Elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent.

4. **Remarque** : les allures des courbes ne sont pas dessinées.

Pour respecter les ensembles de départ et d'arrivée, il faut vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \in \mathbb{R}^+$.

On peut choisir les exemples simples suivants pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ non injective et non surjective :

Exemple 1 : f est constante : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 0$.

Elle n'est pas injective car $f(0) = f(1) = 0$. Elle n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent.

Exemple 2 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = (x - 1)^2 + 1$.

La courbe de f est une translatée de celle $x \mapsto x^2$.

Elle n'est pas injective car $f(0) = f(2) = 2$. Elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent.

Exemple 3 : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \sin x + 1$.

La courbe de f est une translatée verticale de celle $x \mapsto \sin x$.

Elle n'est pas injective car $f(0) = f(\pi) = 1$. Elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 2$ donc 3 n'a pas d'antécédent.

exercice 5.

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Donner les définitions des ensembles suivants puis déterminer les, en résolvant des équations :

$$f^{-1}(\{1\}), \quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right), \quad f^{-1}(\{0\}).$$

2. Etudier les variations de f et résumer les dans un tableau.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier votre réponse.
4. A l'aide de la question 2, donner sans démonstration les ensembles suivants :

$$f([1, 2]), \quad f([-1, 2]), \quad f^{-1}\left(\left] -\infty, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Correction :

1. Par définition $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{1\}\}$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Donc $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$.

Par définition $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \left\{\frac{1}{2}\right\}\}$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Donc $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \{-1, 1\}$.

Par définition $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{0\}\}$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 0$.

Cette équation n'admet pas de solution car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$.

Donc $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

2. f est paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On peut écrire $f = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $h : x \mapsto x^2 + 1$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = h'(x).g'(h(x)) = 2x \frac{-1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$.

Compte tenu de la parité de f , on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		1	
	0	↙ ↘	0

3. D'après la question 1., $\frac{1}{2}$ a deux antécédents par f donc f n'est pas injective et 0 n'a pas d'antécédent par f donc f n'est pas surjective.

4. Comme f est continue et décroissante sur $[1, 2]$, on a $f([1, 2]) = [f(2), f(1)] = [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$.

Comme f est continue, $f([-1, 2]) = [m, M]$ avec m le minimum de f sur $[-1, 2]$ et M son maximum sur $[-1, 2]$. D'après le tableau de variation, $M = 1$ et $m = f(2) < f(1) = f(-1)$, donc $f([-1, 2]) = [\frac{1}{5}, 1]$.

Toujours d'après le tableau de variation, $f(x) \in]-\infty, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$ ou $x \in]1, +\infty[$ donc $f^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}]) =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

exercice 6.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E_1 d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1 - z^5 = 0.$$

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation E_2 :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

Indication : montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 1 - z^5$.

3. On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ puis $S = u + u^2$ et $T = u^3 + u^4$.

Calculer $S + T$, puis montrer que S et T sont conjugués et en déduire la valeur de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

4. En utilisant les formules de l'exercice 2 (question 1), déduire de la question précédente que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme

$$P(x) = 2x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

5. Déterminer une expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en fonction de $\sqrt{5}$.

Correction :

1. Les solutions de l'équation E_1 sont les racines cinquième de l'unité, donc l'ensemble des solutions est :

$$S_1 = \{e^{i\frac{2k\pi}{5}} \mid k \in \{0, \dots, 4\}\}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z - z^2 - z^3 - z^4 - z^5 = 1 - z^5$ par développement puis simplifications.

En notant $A(z) = 1 - z^5$ et $B(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$, on en déduit que

$$A(z) = 0 \Leftrightarrow B(z) = 0 \text{ ou } 1 - z = 0.$$

Donc en notant S_2 l'ensemble des solutions de E_2 , on a $S_1 = S_2 \cup \{1\}$.

Comme B est de degré 4, S_2 a 4 éléments, donc 1 n'est pas dans S_2 , sinon on aurait $\text{card}(S_1) = \text{card}(S_2) = 4$.

Conclusion : $S_2 = \{e^{i\frac{2k\pi}{5}} \mid k \in \{1, \dots, 4\}\}.$

3. $u = e^{i\frac{2\pi}{5}} \in S_2$ donc $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$ c'est-à-dire $S + T = -1$.

De plus $u^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \bar{u}$ et $u^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{u^2}$
donc $T = u^3 + u^4 = \overline{u + u^2} = \bar{S}$.

$S + T = -1$ s'écrit donc $S + \bar{S} = -1$ et il suit que $2\operatorname{Re}(S) = -1$.

Or on a aussi $\operatorname{Re}(S) = \operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{5}}) + \operatorname{Re}(e^{i\frac{4\pi}{5}}) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

On en conclut que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

4. D'après les formules de l'angle double, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$.

D'après cette formule et le résultat de la question précédente, on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = -\frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

On en conclut que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme

$$P(x) = 2x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

5. Le discriminant de P est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et ses racines sont $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

On déduit de la question précédente que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ a pour valeur x_1 ou x_2 .

Or $\frac{2\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$.

Comme $x_2 < 0$ on en conclut que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$