

Examen du 20 décembre 2012

SECTION A (Cours : J. Dubois)

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.

On considère les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$E : z^5 + 1 = 0 \quad E' : z^4 + \bar{z} = 0$$

1. Ecrire -1 sous forme polaire.
2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Soit z une solution **non nulle** de (E') , montrer que $|z| = 1$, puis que z est solution de (E) .
4. Réciproquement, montrer que les solutions de l'équation (E) sont solutions de (E') .
5. Finalement résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.

On considère le polynôme suivant $P(X) = X^6 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, où a, b, c et d sont réels.

On suppose que -1 est racine de multiplicité exactement 3 et 1 est racine simple de $P(X)$.

1. Rappeler la définition d'une racine simple, puis celle d'une racine de multiplicité exactement 3.
2. Estimer le nombre de racines de l'équation $P(X) = 0$ en fonction du degré de $P(X)$.
3. Quelles propriétés de $P(X)$ et de ses dérivées peut-on déduire de l'énoncé ?
4. A l'aide de la question précédente, déterminer les coefficients inconnus de $P(X)$.
5. Après avoir effectué la division euclidienne de $P(X)$ par $A(X) = (X+1)^3(X-1)$ factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F puis calculer sa dimension.

On considère à présent les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 3, 2)$ et on note $G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) .

3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Justifier votre réponse.
4. En déduire la dimension de G .
5. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ à ceux de la famille (u_1, u_2, u_3) . $\mathcal{E}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
6. La famille $\mathcal{E}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G .

Exercice 4.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, -3)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$ et $u_3 = (-3, 2, 2, -1)$. On note $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) .

1. Justifier le fait que $F \neq \mathbb{R}^4$, puis calculer une équation de F .

2. Rappeler la définition d'une base de F .

3. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F .

4. Soit $v = (3, 3, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer que $v \in F$ puis déterminer les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f . Calculer sa dérivée.

2. Etudier la limite de f en 0 puis définir $f(0)$ pour obtenir un prolongement par continuité de f en 0.

3. Etudier alors la dérivabilité de f en 0.

4. Posons $I = f(\mathbb{R}_+)$. Pourquoi I est-il nécessairement un intervalle? Calculer I .

5. On note g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1} .

6. Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur $\mathbb{R}_+$; g^{-1} est-elle dérivable en 0? Justifier votre réponse.

7. Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\frac{1}{e}$?

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I .

2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I .

On note α ce nombre.

3. Soient x, y des réels tels que $x < y$.

Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f sur l'intervalle $[x, y]$.

4. Montrer que, pour tous réels x, y , on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$.

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{2}.$$

6. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

7. Trouver un entier n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.