Examen du 18 juin 2012, section B

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
Dans cet exercice θ désigne un nombre réel.

1. Trouver les solutions Z complexes de l'équation : $Z^2 - 2\cos(\theta)\,Z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions complexes des deux équations suivantes :
$$z^3 = e^{i\theta}, \qquad \text{et} \qquad z^3 = e^{-i\theta}.$$
3. Calculer le polynôme $(z - e^{i\frac{\theta}{3}})(z - e^{-i\frac{\theta}{3}})$ et montrer que ses coefficients sont des nombres réels.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que le polynôme suivant
$$z^6 - 2\cos(\theta)\; z^3 + 1$$
peut s'écrire comme produit de trois polynômes à coefficients réels et chacun de degré 2 que l'on écrira explicitement.

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$, les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (3, 0, -2)$, $u_3 = (1, 2, -1)$ et la droite D engendrée par u_3.

1. Déterminer un système d'équations de D dans la base canonique.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F.
4. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit v un vecteur de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans la base $\mathcal{B}$, à quelle condition sur a_1, a_2 et a_3 a-t-on $v \in F$? Autrement dit, déterminer une équation de F dans la base $\mathcal{B}$.
6. Déterminer de même un système d'équations de D dans la base $\mathcal{B}$.
7. Soit v un vecteur de coordonnées (a_1, a_2, a_3) dans la base $\mathcal{B}$, peut-on trouver un vecteur w de coordonnées (b_1, b_2, b_3) dans la base $\mathcal{B}$ qui vérifie :
$$v + w \in F \text{ et } v - w \in D$$
Justifier la réponse et déterminer, le cas échéant, le ou les vecteurs w satisfaisant cette propriété.

Exercice 3.
Résoudre, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α, le système qui suit :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3\alpha\, z & = & 4 \\ x & + & 2\alpha\, y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 4\alpha \end{array}\right.$$

Exercice 4.

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Rappeler la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
   En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall x \in]c, +\infty[\quad f(x) \leqslant 1$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \;\; x > 0 \end{array} \right.$$

   où y_0 est un réel que l'on précisera.
4. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, c]$ tel que : $\forall x \in [0, c] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que $f(2) > 0$. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2]$.

Exercice 5.

Soient $a < b$ deux réels, on considère une fonction f deux fois continument dérivable sur $[a, b]$, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable et ses dérivées f' et f'' sont continues.

On veut montrer la propriété suivante :

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que : } \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{(b - a)^2}{8} f''(c) \tag{1}$$

Pour montrer cette propriété, on pose, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{x + a}{2}\right) - \frac{(x - a)^2}{8} A$$

avec A un réel.

1. Calculer $\varphi(a)$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout $x \in [a, b]$.
2. Montrer que l'on peut choisir A tel que $\varphi(b) = 0$. (Dans la suite, on suppose donc que le réel A est choisi tel que $\varphi(b) = 0$.)
3. Après avoir énoncé soigneusement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$.
4. Après avoir énoncé soigneusement le théorème des accroissements finis, appliquer-le à la fonction f', sur l'intervalle $[\frac{a+\xi}{2}, \xi]$, et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f''(c)$.
   Conclure à propos du but de l'exercice.