SECTION B

Partiel du 26 novembre 2011

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. Question de cours
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition des énoncés :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (où x_0 et l sont des réels).
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2.
Soit un entier $n \geqslant 1$.
On considère un nombre complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note A l'ensemble des racines n-ièmes complexes de Z.

1. Donner la liste des éléments de A.
2. Donner des nombres complexes z_0 et u tels que $A = \{z_0\, u^0,\ z_0\, u^1,\ z_0\, u^2, \dots\}$.
3. Soit un entier $p \geqslant 1$, calculer la somme $S = \sum\limits_{z \in A} z^p$.

Exercice 3.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Etudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Donner, en le justifiant, un tableau des variations de f.
3. Déterminer, en le justifiant, si f est injective.
4. Déterminer, en le justifiant, si f est surjective.
5. Soit $A = [-1, 2]$. Calculer $f(A)$ puis $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}\big(f(A)\big)$.
6. Donner un exemple d'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ (N.B. l'ensemble d'arrivée) telle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $g^{-1}\big(g(A)\big) = A$ (sans démonstration).

Exercice 4.
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x).
On considère l'ensemble $A = \{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que $\sup(A)$ existe, donner sa valeur et démontrer que cette valeur est bien le $\sup(A)$.
2. Déterminer $f(A)$.
3. Comparer $\sup\big(f(A)\big)$ et $f(\sup A)$.
4. [*Bonus*] : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$, donner une condition suffisante sur g pour avoir $\sup\big(g(A)\big) = g(\sup A)$. La démonstration n'est pas demandée.

Exercice 5.
On considère les polynômes :

$$A(x) = 2x^4 + 12x^3 + 30x^2 + 36x + 20 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 + 3x + (3-i).$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$. On note $C(x)$ le quotient.
2. Résoudre l'équation $B(x) = 0$. On exprimera les solutions sous forme algébrique.
   En déduire une écriture de $B(x)$ comme produit de polynômes de degré 1.
3. A l'aide d'une propriété de A, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$: $B(\alpha) = 0 \Rightarrow C(\overline{\alpha}) = 0$.
   En déduire *sans aucun calcul* les racines du polynôme C, puis la factorisation de $C(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
4. Donner la factorisation de $A(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.
Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^x}{3x^3+1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{|e^{ix}+1|}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln\big(\sqrt{1+x}-1\big)$.

Exercice 7.
Résoudre les systèmes suivants (où a est un paramètre réel) par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1)\ \begin{cases} x - ay = -1 \\ ax - y = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} x - y + 3z - 2t = 1 \\ 2x - 3y + 8z - 7t = 1 \\ 3x - y + 5z + 2t = 9\,. \end{cases}$$