Correction du partiel du 26/11/11

Exercice 1. Question de cours
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la définition des énoncés :

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (où x_0 et l sont des réels).
2. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Correction :

1. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon.$
2. $\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists r > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x > r \ \Rightarrow\ f(x) > \mathrm{A}.$

Exercice 2.
Soit un entier $n \geqslant 1$.
On considère un nombre complexe non nul $\mathrm{Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note A l'ensemble des racines n-ièmes complexes de Z.

1. Donner la liste des éléments de A.
2. Donner des nombres complexes z_0 et u tels que $\mathrm{A} = \{z_0\, u^0,\ z_0\, u^1,\ z_0\, u^2, \dots\}$.
3. Soit un entier $p \geqslant 1$, calculer la somme $\mathrm{S} = \sum_{z\in \mathrm{A}} z^p$.

Correction :

1. *$\mathrm{Z} = r\, e^{i\theta}$ est non nul car $r \neq 0$ donc Z admet n racines n-ièmes distinctes qui sont les nombres : $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ avec k entier dans $[0, n-1]$. Ce sont les éléments de A.*
2. *En posant $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a $\forall k \in [0, n-1],\ z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}\ e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0\, u^k$ puisque $z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$.
On a alors $\mathrm{A} = \{z_0\, u^0,\ z_0\, u^1,\ \dots,\ z_0\, u^{n-1}\}$*
3. *D'après la question 2 :* $\mathrm{S} = \sum_{z\in\mathrm{A}} z^p = \sum_{k=0}^{n-1} z_0^p \left(u^k\right)^p = z_0^p \sum_{k=0}^{n-1} (u^p)^k.$

   S est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $u^p = e^{i\frac{2p\pi}{n}}$.

   ***Cas 1** : $u^p = 1$ c'est-à-dire $\frac{2p\pi}{n}$ est un multiple de 2π qui équivaut à p multiple de n.
   On note q l'entier tel que $p = qn$.*
   $\mathrm{S} = n\, z_0^p = n\, (\sqrt[n]{r})^{qn}\ e^{i\frac{qn\theta}{n}} = n\, r^q\, e^{iq\theta}.$

   ***Cas 2** : $u^p \neq 1$ c'est-à-dire p n'est pas multiple de n.*
   $\mathrm{S} = z_0^p\, \dfrac{1 - u^{pn}}{1 - u^p} = 0$ *car $u^n = 1$ puisque u est une racine n-ième de 1.*

Exercice 3.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Etudier $\lim_{x\to 0} f(x)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Donner, en le justifiant, un tableau des variations de f.

3. Déterminer, en le justifiant, si f est injective.
4. Déterminer, en le justifiant, si f est surjective.
5. Soit $\mathrm{A} = [-1, 2]$. Calculer $f(\mathrm{A})$ puis $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}\big(f(\mathrm{A})\big)$.
6. Donner un exemple d'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ (N.B. l'ensemble d'arrivée) telle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $g^{-1}\big(g(\mathrm{A})\big) = \mathrm{A}$ (sans démonstration).

Correction :

1. Quand $x \to 0$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \to 0$. De plus $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
f est un prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \to \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. f est une fonction paire car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
Il suffit donc d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) > 0$.
Comme f est continue en 0, f croît strictement sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin quand $x \to +\infty$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \to 0$ donc $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \to e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. f est paire donc par exemple $f(1) = f(-1)$ bien que $1 \neq -1$. Il suit que f n'est pas injective.

4. f est positive car l'exponentielle l'est donc par exemple -1 n'a pas d'antécédent par f. Il suit que f n'est pas surjective.

5. D'après la continuité et les variations de f, $f\left([-1, 2]\right) = [0, f(-1)] \cup [0, f(2)] = [0, e^{-\frac{1}{4}}]$.
En effet, $f(-1) = f(1) \leqslant f(2) = e^{-\frac{1}{4}}$ car f croît sur $\mathbb{R}^+$.
Toujours d'après le tableau de variations et la parité de f, $f^{-1}\left([0, f(2)]\right) = [-2, 2]$.
Donc $\mathrm{A} \subset f^{-1}\left(f\left(\mathrm{A}\right)\right)$ strictement.

6. Il faut et il suffit que g soit injective. Par exemple $g = exp$ convient.

Exercice 4.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x).
On considère l'ensemble $\mathrm{A} = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que sup(A) existe, donner sa valeur et démontrer que cette valeur est bien le sup(A).
2. Déterminer $f(\mathrm{A})$.
3. Comparer $\sup\big(f(\mathrm{A})\big)$ et $f(\sup \mathrm{A})$.

4. [*Bonus*] : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}$, donner une condition suffisante sur g pour avoir $\sup\big(g(\mathrm{A})\big) = g(\sup \mathrm{A})$. La démonstration n'est pas demandée.

Correction :

1. *Pour tout $n > 0$, $1 - \frac{1}{n} < 1$. Il suit que* A *est majoré par 1, or toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure, donc* $\sup(\mathrm{A})$ *existe.*
   Montrons que $\sup(\mathrm{A}) = 1$*, c'est-à-dire que 1 est le plus petit des majorants de* A.
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors $\frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$.
   Comme $1 - \frac{1}{n} \in \mathrm{A}$, il suit que $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. *(CQFD)*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0$.*
   On en déduit que $f(\mathrm{A}) = \{0\}$.
3. *$f(\mathrm{A})$ est fini donc* $\sup\big(f(\mathrm{A})\big) = \max\big(f(\mathrm{A})\big) = 0$ *et* $f(\sup \mathrm{A}) = f(1) = 1$.
   Conclusion : $\sup\big(f(\mathrm{A})\big) = 0 < f(\sup \mathrm{A}) = f(1) = 1$.
   Remarque : cette propriété est une conséquence de la croissance de f.
   Démonstration : il suffit de montrer que $f(\sup \mathrm{A})$ est un majorant de $f(\mathrm{A})$. Dès lors, on sait que $f(\sup \mathrm{A})$ est supérieur au plus petit des majorants de $f(\mathrm{A})$, donc à $\sup\big(f(\mathrm{A})\big)$.
   Or pour tout $x \in \mathrm{A}$, $x \leqslant \sup \mathrm{A}$ car $\sup \mathrm{A}$ est un majorant de A. *Comme f est croissante, on en déduit que $f(x) \leqslant f(\sup \mathrm{A})$. Il suit que $f(\sup \mathrm{A})$ est un majorant de $f(\mathrm{A})$ (CQFD).*
4. *Il suffit que* $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \sup \mathrm{A} \\ x < \sup \mathrm{A}}} g(x) = g(\sup \mathrm{A})$.
   C'est une condition plus faible que la continuité en $\sup \mathrm{A} = 1$ qui assure aussi, a fortiori, l'égalité.
   Démonstration : $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = g(1)$ *équivaut à*
   $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \alpha < x < 1 \;\Rightarrow\; g(1) - \varepsilon < g(x) < g(1) + \varepsilon \qquad$ *(P).*
   D'après la démonstration précédente, comme g est croissante, $g(1) = g(\sup \mathrm{A})$ est un majorant de $g(\mathrm{A})$. Montrons que c'est le plus petit.
   Soit $\varepsilon > 0$, on choisit un réel α selon (P), puis on choisit un entier $n > \frac{1}{\alpha}$. On a $1 - \alpha < 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc d'après (P) : $g(1) - \varepsilon < g(1 - \frac{1}{n})$. Comme $1 - \frac{1}{n} \in \mathrm{A}$, $g(1) - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $g(\mathrm{A})$. (CQFD)

Exercice 5.

On considère les polynômes :

$$\mathrm{A}(x) = 2x^4 + 12x^3 + 30x^2 + 36x + 20 \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x) = x^2 + 3x + (3 - i).$$

1. Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{A}(x)$ par $\mathrm{B}(x)$. On note $\mathrm{C}(x)$ le quotient.
2. Résoudre l'équation $\mathrm{B}(x) = 0$. On exprimera les solutions sous forme algébrique.
   En déduire une écriture de $\mathrm{B}(x)$ comme produit de polynômes de degré 1.
3. A l'aide d'une propriété de A, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$: $\mathrm{B}(\alpha) = 0 \Rightarrow \mathrm{C}(\overline{\alpha}) = 0$.
   En déduire *sans aucun calcul* les racines du polynôme C, puis la factorisation de $\mathrm{C}(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
4. Donner la factorisation de $\mathrm{A}(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Correction :

1. *La division division euclidienne de* $\mathrm{A}(x)$ *par* $\mathrm{B}(x)$ *s'écrit :*

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2x^4 & +12x^3 & +30x^2 & +36x & +20 & x^2+3x+(3-i) \\ \cline{7-7}
\ominus & 2x^4 & +6x^3 & +(6-2i)x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^3 & +(24+2i)x^2 & +36x & +20 & 2x^2+6x+6+2i \\
\ominus & & 6x^3 & +18x^2 & +(18-6i)x & & \\ \cline{3-5}
 & & & (6+2i)x^2 & +(18+6i)x & +20 & \\
\ominus & & & (6+2i)x^2 & +(18+6i)x & +20 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)\,\mathrm{C}(x)$ *avec* $\mathrm{C}(x) = 2x^2 + 6x + 6 + 2i$.

2. *Le discriminant de l'équation* $\mathrm{B}(x) = x^2 + 3x + (3-i) = 0$ *est* $\Delta = 3^2 - 4(3-i) = -3 + 4i$.
Calculons les racines carrées de Δ *sous la forme* $x + iy$ *avec* x *et* y *réels. On a les équivalences :*

$$(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{array}\right.$$

Les racines carrées de Δ *sont donc* $1+2i$ *et* $-1-2i$.
On en déduit que B *a pour racines :* $z_1 = \frac{-3-1-2i}{2} = -2-i$ *et* $z_2 = \frac{-3+1+2i}{2} = -1+i$.
Comme B *est unitaire, il suit que la factorisation de* B *en polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{B}(x) = (x+2+i)\,(x+1-i)$.

3. *Comme* A *est un polynôme à coefficients réels, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}(a) = \mathrm{B}(a)\,\mathrm{C}(a) \in \mathbb{R}$. *Donc pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}(a)$ *et* $\mathrm{C}(a)$ *sont conjugués à un facteur réel près (dépendant de a ou pas).*
Il faut donc comparer les polynômes $\mathrm{C}(x)$ *et* $\overline{\mathrm{B}(x)}$.
Il est clair que : $\mathrm{C}(x) = 2\,\overline{\mathrm{B}(x)}$ *donc pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$, *si* $\mathrm{B}(\alpha) = 0$ *alors* $\mathrm{C}(\alpha) = 2\,\overline{\mathrm{B}(\alpha)} = 0$.
On en déduit que $\overline{z_1} = -2+i$ *et* $\overline{z_2} = -1-i$ *sont des racines de* C. *Comme* C *est de degré 2, ce sont les seules.*
Enfin C *a pour coefficient dominant 2, donc la factorisation de* C *en polynômes irréductibles de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{C}(x) = 2\,(x+2-i)\,(x+1+i)$.

4. *D'après les questions 1, 2 et 3,* $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x)\,\mathrm{C}(x) = 2\,(x+2+i)(x+1-i)(x+2-i)(x+1+i)$.
Or les polynômes $x^2+4x+5 = (x+2+i)(x+2-i)$ *et* $x^2+2x+2 = (x+1-i)(x+1+i)$ *sont des polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *car ils sont de degré 2 et sans racine réelle.*
Conclusion : la factorisation de $\mathrm{A}(x)$ *en polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *est* $\mathrm{A}(x) = 2\,(x^2+4x+5)\,(x^2+2x+2)$.

Exercice 6.
Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^x}{3x^3+1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left|e^{ix}+1\right|}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.

Correction :

1. Pour tout $x>0$, $\mathrm{E}(x) := \dfrac{x^3+e^x}{3x^3+1}$ est défini et $\mathrm{E}(x) = \dfrac{e^x}{x^3}\,\dfrac{1+\frac{x^3}{e^x}}{3+\frac{1}{x^3}}$.
Quand $x\to+\infty$, d'après le théorème de comparaison des fonctions puissances et exponentielle, $\dfrac{e^x}{x^3}\to+\infty$. De plus $\dfrac{1}{x^3}\to 0$ donc $\dfrac{1+\frac{x^3}{e^x}}{3+\frac{1}{x^3}}\to\dfrac{1}{3}$.
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{E}(x)=+\infty$.

2. On pose $\mathrm{N}(x)=x^3-2x^2-x+2$ et $\mathrm{D}(x)=x^3-3x^2+3x-1$.
$\mathrm{N}(1)=\mathrm{D}(1)=0$ donc 1 est racine des polynômes N et D. On recherche la multiplicité de 1 dans chacun d'eux.
$\mathrm{N}'(x)=3x^2-4x-1$ donc $\mathrm{N}'(1)=-2$. On en déduit que 1 est racine simple de N. On note Q est le quotient de la division de $\mathrm{N}(x)$ par $x-1$. On a $\mathrm{N}'(x)=\mathrm{Q}(x)+(x-1)\,\mathrm{Q}'(x)$ donc $\mathrm{Q}(1)=\mathrm{N}'(1)=-2$.
Pour le dénominateur, on reconnaît une identité remarquable $\mathrm{D}(x)=(x-1)^3$ (on peut aussi calculer $\mathrm{D}'(1)$ qui est nul puis $\mathrm{D}''(1)$, nul aussi ; 1 est donc racine au moins triple et D est unitaire de degré 3 donc $\mathrm{D}(x)=(x-1)^3$).
Finalement, pour tout $x\neq 1$, $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$ est défini et $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}=\dfrac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{Q}(x)$.
Or $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, Q est continu en 1 et $\mathrm{Q}(1)=-2$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}=-\infty$.

3. On pose $f(x)=\left|e^{ix}+1\right|$. f est une fonction réelle et bornée par 0 et 2.
En effet, $\forall z\in\mathbb{C}, |z|\geqslant 0$ et d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x\in\mathbb{R}, \left|e^{ix}+1\right|\leqslant\left|e^{ix}\right|+|1|=2$.
Pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}$ est défini et $0\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{2}{x}$.
D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

4. On pose $g(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)$.
Soit $x>0$, $\sqrt{1+x}>\sqrt{1}=1$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il suit que $\sqrt{1+x}-1>0$ et donc $g(x)$ est bien défini.
On a de plus $\sqrt{1+x}-1=\dfrac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}$.
Donc $x\,g(x)=x\ln(x)-x\ln\left(\sqrt{1+x}+1\right)$.
D'après le théorème de comparaison des fonctions puissances et logarithme, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$.
Par continuité du logarithme en 2, $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\sqrt{1+x}+1\right)=\ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\left(\sqrt{1+x}+1\right)=0$.
On en conclut que $\lim\limits_{x\to 0^+}x\,g(x)=0$.

Exercice 7.
Résoudre les systèmes suivants (où a est un paramètre réel) par la méthode du pivot de Gauss.

$$(\mathrm{S}_1)\ \left\{\begin{array}{l} x - ay = -1 \\ ax - y \ = \ 0 \end{array}\right. \qquad (\mathrm{S}_2)\ \left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & +3z & -2t & = 1 \\ 2x & -3y & +8z & -7t & = 1 \\ 3x & -y & +5z & +2t & = 9\,. \end{array}\right.$$

Correction :

1. *On échelonne le système* (S_1) *par la méthode de Gauss :*

$$(\mathrm{S}_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrl} x & -ay & = & -1 & \mathrm{L}_1 \\ & (a^2-1)y & = & a & \mathrm{L}_2 - a\,\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

Cas 1 *:* $a \notin \{-1, 1\}$. *Alors* $a^2 - 1 \neq 0$, *ce système échelonné est compatible et sans inconnue secondaire. Il admet donc une solution unique que l'on calcule par substitution :*

$$\begin{cases} x = -1 + ay = -1 + \dfrac{a^2}{a^2-1} = \dfrac{1}{a^2-1} \\ y = \dfrac{a}{a^2-1} \end{cases}$$

Cas 2 *:* $a \in \{-1, 1\}$. *La deuxième équation s'écrit* $0 = a$ *or* a *est non nul donc le système est incompatible.*

2. *On échelonne le système* (S_2) *par la méthode de Gauss :*

$$(\mathrm{S}_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & -y & +3z & -2t & = & 1 & \mathrm{L}_1 \\ & -y & +2z & -3t & = & -1 & \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & 2y & -4z & +8t & = & 6 & \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & -y & +3z & -2t & = & 1 & \mathrm{L}_1 \\ & y & -2z & +3t & = & 1 & -\mathrm{L}_2 \\ & y & -2z & +4t & = & 3 & \mathrm{L}_3/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & & +z & +t & = & 2 & \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ & y & -2z & +3t & = & 1 & \mathrm{L}_2 \\ & & & t & = & 2 & \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & & +z & & = & 0 & \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ & y & -2z & & = & -5 & \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_3 \\ & & & t & = & 2 & \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

Ce système échelonné est compatible et admet pour inconnue secondaire z. *On pose* $z = \lambda$.

$$(\mathrm{S}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ t = 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_2) *est donc* $\mathrm{D} = \{(-\lambda, -5 + 2\lambda, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
D *est la droite passant par le point* $\mathrm{A} = (0, -5, 0, 2)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{v} = (-1, 2, 1, 0)$.