

Examen du 6 janvier 2012

SECTION C (Cours : T. Joly)

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.

Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

$$z^7 = 64\sqrt{3} + 64i.$$

Exercice 2.

1. On suppose que b est un paramètre dans $\mathbb{C}$ et on considère le polynôme $S_b(X) = X^3 - b^3$ de la variable complexe X . Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.
2. On considère dans la suite le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$.
3. Dédurre de la question précédente que $P(x)$ peut s'écrire comme la différence entre deux cubes.
4. Dédurre des questions précédentes une factorisation de $P(x)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 3.

Soit les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (2, 7, 6)$, $u_4 = (2, 5, 2)$ et $u_5 = (1, 2, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donner la définition d'une base de E puis celle de la dimension de E . Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille de vecteurs (u_2, u_4, u_5) est-elle libre ?
3. Justifier soigneusement et *sans aucun calcul* le fait que (u_2, u_4, u_5) est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 3)$ dans la base (u_2, u_4, u_5) .
4. *Sans effectuer aucun calcul*, déterminer le sous-espace engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .

On considère, dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 4a + 2b - 3c = 0\}$ et le sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 .

5. Déterminer *sans faire de calcul* si la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.
6. Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation vectorielle :

$$x u_1 + y u_2 + z u_3 + t u_4 = v$$

possède (au moins) une solution (x, y, z, t) si et seulement si $4a - 2b + c = 0$.

7. Peut-on en conclure à l'aide de la question précédente que $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 4a - 2b + c = 0\}$? Justifier soigneusement la réponse.
8. Déterminer la dimension de G et donner une base de G extraite de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) .
9. Déterminer une base et la dimension du sous-espace $F \cap G$.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition précise de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x}$.

3. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Etudier les variations de F puis esquisser le graphe de F sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{2^x}$.

On note f la restriction de F à $[0, +\infty[$.

5. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [2, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue.
6. Montrer que l'application f^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$. Est-elle dérivable en 2 ?
7. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{(f(x) - 2)(f(x) + 2)}$.
8. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 2$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{(y-2)(y+2)}}.$$

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}(1 + \cos x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

On note $I = [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I .
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I .
On note α ce nombre.
3. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .