Test 3

Question de cours
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Rappeler les propriétés à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Rappeler la définition de : "$(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille linéairement indépendante".

c. Rappeler la définition de : "$(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de F".

d. Donner un exemple de base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$u = (1, m, 1)$, $v = (m, -m, -m-2)$, $w = (m+2, m, -m)$ où m est un paramètre réel.

a. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?

b. Que peut-on en déduire pour le rang de (u, v, w) ?

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces F et G tels que
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \text{ et } 3x - y - z = 0 \}$,
G est engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (4, -1, 3)$ et $v_3 = (1, 2, -3)$.

a. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F et donner sa dimension.

b. Montrer que G admet pour équation $x - 5y - 3z = 0$.

c. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G et donner sa dimension.

d. Soit $\mathcal{E}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas une famille libre.

e. A l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, déterminer sans calculs supplémentaires si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

f. On note H l'espace engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{E}$. Pourquoi H contient-il les sous espaces F et G ? Déduire des résultats précédents que $\dim H = 2$.

g. On considère maintenant le sous-espace $K = F \cap G$.
Par la méthode de votre choix, déterminer la dimension de K.

h. Comparer $\dim H + \dim K$ et $\dim F + \dim G$.