Correction Test 2

Exercice 1.

- a. Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner les définitions de l'injectivité et de la surjectivité de f .
- b. Soit P un polynôme et α une racine de P .
Donner la définition de la multiplicité m de α comme racine de P .

Correction :

- a. f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f .
 f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f .
- b. α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $(x - a)^m$ divise P et $(x - a)^{m+1}$ ne divise pas P .

Exercice 2.

- a. Donner un exemple d'application injective de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ (sans justification).
- b. Donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ (sans justification).

Correction :

- a. Soit $Id : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Id(x) = x$, f est injective.
- b. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin x$, f est surjective.

Exercice 3.

On considère l'application suivante : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto e^{x^2}$

- a. Décrire, en le justifiant, les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f([-2, 1]) ; \quad f^{-1}(\{e\}) ; \quad f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right)$$

- b. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
- c. Déterminer, en le justifiant, des intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}^+$ tels que la restriction de f à I soit une bijection de I sur J .

Correction :

- a. Pour déterminer ces ensembles, il faut étudier les variations de f .
 f est une fonction continue et dérivable.
Elle est également paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x e^{x^2}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(]-2, 1])$ est l'ensemble des images des éléments de $]-2, 1]$ par f .

Comme f n'est pas monotone sur $]-2, 1]$, le plus simple est de le découper en deux intervalles sur lesquelles elle l'est : $]-2, 1] =]-2, 0] \cup [0, 1]$.

D'après les variations de f , $f(]-2, 0]) = [f(0), f(-2)[$ et $f([0, 1]) = [f(0), f(1)]$.

De plus $f(0) = 1$ et $f(-2) = e^4 = f(2) > f(1)$ donc

$$f(]-2, 1]) = f(]-2, 0] \cup [0, 1]) = f(]-2, 0]) \cup f([0, 1]) = [f(0), f(-2)[= [1, e^4[$$

$f^{-1}(\{e\})$ est l'ensemble des antécédents de e par f .

D'après l'étude de f , $f^{-1}(\{e\}) = \{-1, 1\}$.

$f^{-1}([\frac{1}{2}, +\infty[)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de $[\frac{1}{2}, +\infty[$ par f . D'après l'étude de f , 1 est le minimum de f donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.

On en conclut que $f^{-1}([\frac{1}{2}, +\infty[) = \mathbb{R}$.

b. Comme f est paire, elle ne peut pas être injective, par exemple $f(1) = f(-1)$ bien que $1 \neq -1$.

Comme f admet pour minimum 1, elle n'est pas surjective, par exemple 0 est dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$ mais n'a pas d'antécédent.

c. On choisit I de sorte que f soit strictement monotone sur I . La restriction de f à I est alors injective. Par exemple $I = [0, +\infty[$.

Puis on choisit $J = f(I)$ ce qui assure la surjectivité de I sur J . D'après la continuité et les variations de f , $J = f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

Exercice 4.

On considère les polynômes $A(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ et $B(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$.

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B .

Que peut-on en déduire pour les racines de A et de B ?

Correction :

La division euclidienne de A par B est :

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^5 \quad \quad +x^3 \quad -x^2 \quad -1 \\ \ominus \quad x^5 \quad -x^4 \quad +x^3 \quad -x^2 \\ \hline \quad \quad x^4 \quad \quad \quad \quad -1 \\ \ominus \quad \quad x^4 \quad -x^3 \quad +x^2 \quad -x \\ \hline \quad \quad \quad x^3 \quad -x^2 \quad +x \quad -1 \\ \ominus \quad \quad \quad x^3 \quad -x^2 \quad +x \quad -1 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array} & \begin{array}{l} 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\ \hline \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Le quotient est $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et le reste est nul.

On en déduit que A est divisible par B . Par conséquent, les racines de B sont toutes des racines de A . Et même leur multiplicité dans B est inférieure à leur multiplicité dans A .