Correction du test 1-a

Exercice 1.
On pose $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
Donner la forme algébrique des racines carrées de z_1 et de z_2.
En déduire la forme algébrique des racines carrées de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Correction :
Racines carrées de z_1.
On recherche les racines carrées sous forme algébrique, donc on cherche x et y réels tels que $(x+iy)^2 = z_1 = 4+3i$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{16+9} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 9 \\ 2y^2 = 1 \\ 2xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = \frac{3+i}{\sqrt{2}} \text{ ou } x + iy = \frac{-3-i}{\sqrt{2}}$$

Les racines carrées de z_2 sont donc $r_1 = \dfrac{3+i}{\sqrt{2}}$ et $r_2 = \dfrac{-3-i}{\sqrt{2}}$.

Racines carrées de z_2.
On utilise la forme polaire de z_2 : $|z_2| = \sqrt{4} = 2$ et $\dfrac{z_2}{|z_2|} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
Les racines carrées de z_2 sont donc $s_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $s_2 = -s_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Racines carrées de $\frac{z_1}{z_2}$.
D'après ce qui précède $\dfrac{r_1}{s_1}$ est une racine carrée de $\dfrac{z_1}{z_2}$ car $\left(\dfrac{r_1}{s_1}\right)^2 = \dfrac{r_1^2}{s_1^2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.
Les racines carrées de $\dfrac{z_1}{z_2}$ sont donc

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{3+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{(3+i)e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{(3+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})}{2} = \frac{(3+i)(\sqrt{3}+i)}{4} = \frac{(3\sqrt{3}-1) + i(3+\sqrt{3})}{4}$$

et $-\dfrac{r_1}{s_1} = \dfrac{(1-3\sqrt{3}) - i(3+\sqrt{3})}{4}$.

Exercice 2.
Donner sous forme polaire puis algébrique les racines troisièmes dans $\mathbb{C}$ de -1.
En déduire les solutions de l'équation $(\overline{z})^3 = -1$.

Correction :
On écrit d'abord -1 sous forme polaire : $-1 = e^{i\pi}$.

On en déduit que les racines cubiques de -1 sont :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi} = -1, \quad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On note que, comme -1 est réel, les racines cubiques de -1 sont réelles ou par couple de nombres conjugués. Ce résultat est généralisable aux racines complexes n-ièmes d'un nombre réel.

Remarque *: on pouvait aussi noter immédiatement que $(-1)^3 = -1$ donc -1 est une racine cubique de -1. L'ensemble des racines cubiques de -1 s'obtient alors en multipliant -1 par les racines cubiques de 1 soit : $-1.1 = -1 = z_1$, $-1.e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = z_2$ et $-1.e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = z_0$.*

Pour résoudre l'équation (E) : $(\overline{z})^3 = -1$, on pose $Z = \bar{z}$. On a alors $z = \bar{Z}$.
z est solution de (E) équivaut à Z est solution de l'équation (E') : $Z^3 = -1$.
Comme (E') a pour solution z_0, z_1 et z_2 on en déduit que (E) a pour solution :
$\overline{z_0} = z_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{z_1} = -1$ *et* $\overline{z_2} = z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 3.
Soit a un réel, exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos a$ uniquement.

Correction :
D'après la formule de Moivre : $\cos(3a) + i\sin(3a) = e^{i3a} = (e^{ia})^3 = (\cos a + i\sin a)^3$.

La formule du binôme de Newton nous dit que pour tous nombres x et y,
$(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + y^3$.

On en déduit : $(\cos a + i\sin a)^3 = (\cos a)^3 + 3(\cos a)^2\,(i\sin a) + 3\cos a\,(i\sin a)^2 + (i\sin a)^3$

En identifiant les parties réelles dans la formule de Moivre, on en déduit que :

$$\cos(3a) = \cos^3 a - 3\cos a\,\sin^2 a = \cos^3 a - 3\cos a\,(1-\cos^2 a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Correction du test 1-b

Exercice 1.
On pose $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
Donner la forme algébrique des racines carrées de z_1 et de z_2.
En déduire la forme algébrique des racines carrées de $\frac{z_1}{z_2}$.

Remarque : On pourra utiliser les formules suivantes :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Correction :
Racines carrées de z_1.
On recherche les racines carrées sous forme algébrique, donc on cherche x et y réels tels que $(x+iy)^2 = z_1 = 3 - 4i$ ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{16+9} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = 2 - i \text{ ou } x + iy = -2 + i$$

Les racines carrées de z_2 sont donc $r_1 = 2 - i$ et $r_2 = -2 + i$.

Racines carrées de z_2.
On utilise la forme polaire de z_2 : $|z_2| = \sqrt{4} = 2$ et $\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Les racines carrées de z_2 sont donc

$$s_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad s_2 = -s_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Remarque *: on pouvait aussi calculer les racines carrées de z_2 sous forme algébrique.*
On obtenait deux racines $s'_1 = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ et $s'_2 = -s'_1$.

En notant que $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$,

on en déduisait que $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

De même $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, donc $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

On retrouvait alors les mêmes expréssions pour s_1 et s'_1 d'une part, s_2 et s'_2 d'autre part.

Racines carrées de $\frac{z_1}{z_2}$.

D'après ce qui précède $\dfrac{r_1}{s_1}$ *est une racine carrée de* $\dfrac{z_1}{z_2}$ *car* $\left(\dfrac{r_1}{s_1}\right)^2 = \dfrac{r_1^2}{s_1^2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Les racines carrées de $\dfrac{z_1}{z_2}$ *sont donc*

$$\frac{r_1}{s_1} = (2-i)\,\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}} = (2-i)\,\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}} = \frac{(2-i)\left((\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)\right)}{\sqrt{2}.2.\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-3)}{4}$$

et $-\dfrac{r_1}{s_1} = \dfrac{-(3\sqrt{3}+1)+i(3-\sqrt{3})}{4}$.

Exercice 2.

Donner sous forme polaire puis algébrique les racines quatrièmes dans $\mathbb{C}$ de -1.

En déduire les solutions de l'équation $\left(\dfrac{1}{z}\right)^4 = -1$.

Correction :

On écrit d'abord -1 *sous forme polaire :* $-1 = e^{i\pi}$.

On en déduit que les racines quatrièmes de -1 sont :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad et \quad z_3 = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On note (E) l'équation $\left(\dfrac{1}{z}\right)^4 = -1$ *et (E') :* $z^4 = -1$.

En multipliant par z^4 *les deux membres de (E), on obtient l'équation* $1 = -z^4$*, c.a.d. (E').*

L'ensemble des solutions n'est pas modifié car $z = 0$ *n'est pas solution de (E').*

Comme (E') a pour solution les racines quatrièmes de -1*, les solutions de (E) sont* z_0, z_1, z_2 *et* z_3.

Remarque *: on pouvait aussi effectuer le changement d'inconnue :* $Z = \frac{1}{z}$.

Exercice 3.

Soit a un réel, exprimer $\sin(3a)$ en fonction de $\sin a$ uniquement.

Correction :

D'après la formule de Moivre : $\cos(3a) + i\sin(3a) = e^{i3a} = (e^{ia})^3 = (\cos a + i\sin a)^3$.

La formule du binôme de Newton nous dit que pour tous nombres x *et* y,
$(x+y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 + y^3$.

On en déduit : $(\cos a + i\sin a)^3 = (\cos a)^3 + 3(\cos a)^2\,(i\sin a) + 3\cos a\,(i\sin a)^2 + (i\sin a)^3$

En identifiant les parties imaginaires dans la formule de Moivre, on en déduit que :

$$\sin(3a) = 3\cos^2 a\,\sin a - \sin^3 a = 3(1-\sin^2 a)\,\sin a - \sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a$$