Université Paris 7 | MT1 MM1
L1, Sciences exactes | 2010-2011

**SECTION C (Cours : T. Joly)**

# Examen de 2$^{\text{de}}$ session du 14 juin 2011

***Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.***

**Exercice 1.**

1. Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que
$$z^5 = 16 - 16\,i\,\sqrt{3}\,.$$
2. Décrire, dans le plan complexe, l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que
$$(1-i)z + (1+i)\bar{z} + 1 = 0\,.$$

**Exercice 2.** On considère les fonctions polynômiales suivantes :
$$P(x) = x^5 + (1-2i)x^4 + (3-6i)x^3 + (3-6i)x^2 + (2-6i)x + 2 - 4i$$
$$Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1\,.$$

1. Factoriser $Q(x)$ en un produit de polynômes de degré 1.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
3. Factoriser $P(x)$ en un produit de polynômes de degré 1.

**Exercice 3.**
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et on considère les vecteurs $u_1 = (1,3,2,-1)$, $u_2 = (2,-1,1,-1)$, $u_3 = (1,-1,1,1)$ et $u_4 = (0,1,1,1)$ ; on note $F$ le sous-espace vectoriel engendré par ces 4 vecteurs.

1. Montrer que $F$ est défini par une équation que l'on précisera (justifier soigneusement le fait qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ appartient à $F$ si et seulement si ses composantes vérifient cette équation). $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ ?
2. Peut-on en déduire si la famille $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ est libre ou liée ? Justifier.
3. Extraire de la famille $(u_1,u_2,u_3,u_4)$ une base de $F$. Déterminer la dimension de $F$.
4. Soit $m$ un réel, on considère le système $\mathcal{S}_m$ suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & m^2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -m \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & m \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$
D'après la question 1, pour quelles valeurs de $m$ ce système admet-il au moins une solution ?
5. On suppose $m = 1$. Déterminer l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}_1$.

**Exercice 4.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à veleurs réelles. Donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\varepsilon>0$) de la formule : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la définition exacte (à l'aide d'un réel $\varepsilon>0$) de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
3. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(x)=x^2\ \ln\left(x^2\right) \quad \text{pour tout réel } x\neq 0. \end{array}\right.$$

**Exercice 5.** On considère la fonction $f:[0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=2x+\frac{\pi}{4}-\arctan x.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Étudier les variations de $f$ sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$. En déduire que la courbe de $f$ admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation.
3. Montrer que $f$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera et que l'application réciproque $f^{-1}$ est continue sur $I$.
4. Montrer que l'application $f^{-1}$ est dérivable sur $I$.
5. Calculer les valeurs $(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $(f^{-1})'(2)$ de la dérivée de $f^{-1}$ en $\frac{\pi}{4}$ et en 2.

**Exercice 6.**

On considère la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I=[1,2]$.

1. Montrer que pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n$ est définie et appartient à $I$.
2. Montrer avec soin que si la suite $(u_n)$ converge alors sa limite $l$ appartient à $I$ et vérifie $f(l)=l$.
3. En déduire que si la suite $(u_n)$ converge alors sa limite est $\sqrt{2}$.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I, \quad |f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2}\,|x-y|\,.$$

5. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left|u_n-\sqrt{2}\right|$.
6. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)$ ?
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{2}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à $10^{-2}$ ?
9. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$ ; en déduire : $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leqslant\left|u_n-\sqrt{2}\right|^2$, puis : $\left|u_n-\sqrt{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2^{2^n}}$ . Comparer cette majoration d'erreur à celle trouvée à la question 6.