CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL DU 11 DÉCEMBRE 2010
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Question de cours 1. Donner les définitions suivantes :
a) application injective ;
b) application surjective ;
c) application bijective.

Question de cours 2. *a*) Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis. (On suppose connu le théorème de Rolle.)
b) À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer la propriété bien connue :
(P) *Soit f une fonction dérivable définie sur $]a,b[$ et à valeurs réelles. Si $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]a,b[$, alors f est strictement croissante.*

Question de cours 3. Qu'appelle-t-on racine double (ou zéro double) d'un polynôme ?

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)z - (1-i) = 0$.

Exercice 1. L'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

se résout sur $\mathbb{C}$ par la même formule que sur $\mathbb{R}$:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ et où $\sqrt{\Delta}$ désigne l'une des racines carrées de Δ.

Ici nous avons $a = 1$, $b = -(1+2i)$, $c = -1+i$, d'où $\Delta = (1+2i)^2 - 4(-1+i) = 1+4i-4+4-4i = 1$.

Les deux racines sont donc

$$z = \frac{1+2i \pm 1}{2}$$

soit

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = i.$$

Exercice 2. Soit $\mathrm{P}(z) = z^4 - z^3 - 3z + 3$.
a) Montrer que l'on a un polynôme $\mathrm{Q}(z)$ tel que $\mathrm{P}(z) = (z-1)\mathrm{Q}(z)$, et déterminer $\mathrm{Q}(z)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$. Indiquer les multiplicités des différentes racines.

Exercice 2. *a*) On a $\mathrm{P}(1) = 1-1-3+3 = 0$, on peut donc mettre $z-1$ en facteur dans $\mathrm{P}(z)$, c'est-à-dire écrire

$$\mathrm{P}(z) = (z-1)\mathrm{Q}(z),$$

où Q est un polynôme.

Il est très facile de déterminer $\mathrm{Q}(z)$ explicitement :

$$\mathrm{P}(z) = z^4 - z^3 - 3z + 3 = (z-1)z^3 - 3(z-1) = (z-1)(z^3-3).$$

On a donc

$$\mathrm{Q}(z) = z^3 - 3.$$

Remarque. On peut aussi déterminer $\mathrm{Q}(z)$ par identification (c'est assez long) ou effectuer la division euclidienne de $\mathrm{P}(z)$ par $z-1$ (ici, c'est très rapide).

b) Puisque $\mathrm{P}(z) = \mathrm{Q}(z)(z^3-1)$, les racines de l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$ sont celles de $z-1=0$ et celles de $z^3-3=0$, soit

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \sqrt[3]{3} \quad z_3 = \sqrt[3]{3}\,e^{2i\pi/3}, \quad z_4 = \sqrt[3]{3}\,e^{4i\pi/3} = \overline{z_3}.$$

Toutes les racines sont simples.

Exercice 3. *a*) Montrer que l'équation

$$x = 1 + \sqrt{x} \quad (x \geqslant 0)$$

n'a qu'une seule racine, égale à $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}.$$

b) Montrer que si $0 < x < \alpha$, alors $0 < x < f(x) < \alpha$.

c) Montrer que f détermine une bijection monotone croissante de $[0,\alpha]$ sur $[1,\alpha]$.

d) On définit la suite (u_n) par récurrence en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est croissante, majorée, qu'elle converge, et donner sa limite.

Exercice 3. *a*) Rappelons que si a et b sont des réels

$$a = \sqrt{b} \iff a^2 = b \text{ et } a \geqslant 0$$

($\sqrt{b}$ est positif par définition, et $a^2 = b$ sans condition équivaut à $a = \pm\sqrt{b}$. D'autre part, il n'est pas nécessaire de supposer $b \geqslant 0$ dans le second membre de l'équivalence parce que cette propriété est assurée par le fait que b est égal à un carré).

L'équation

$$x = 1 + \sqrt{x}$$

est donc équivalente à

$$x - 1 = \sqrt{x}$$

et à

$$(x-1)^2 = x, \quad x - 1 \geqslant 0$$

ce qui s'écrit encore

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x \geqslant 1.$$

L'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

a pour racines

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Seule la racine α est $\geqslant 1$ (on a $2 < \sqrt{5} < 3$, d'où $0 < \beta < \frac{1}{2}$; on peut aussi observer que $\alpha\beta = 1$).

b) On a par hypothèse $f(\alpha) = \alpha$, et la fonction f est strictement croissante. Par conséquent

$$x < \alpha \implies f(x) < f(\alpha) = \alpha.$$

Étudions le signe de $f(x) - x = g(x)$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1.$$

Par conséquent $g'(x)$ est < 0 lorsque $\frac{1}{2\sqrt{x}} < 1$, c'est-à-dire lorsque $x > \frac{1}{4}$ et > 0 sur $]0, \frac{1}{4}[$.

x	0	$\frac{1}{4}$	α
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x) = f(x) - x$	$1 \nearrow$		$\searrow 0$

Il résulte du tableau de variation que $g(x)$ est > 0 et donc que $f(x) > x$ sur $[0,\alpha[$.

En rassemblant les résultats obtenus, on obtient

$$0 < x < \alpha \implies 0 < x < f(x) < \alpha.$$

c) La fonction f est continue sur $[0,\alpha]$, et elle est strictement croissante sur cet intervalle car elle est dérivable partout sauf au point 0 et que $f'(x) > 0$ sur $[0,\alpha[$. Elle définit donc une bijection de $[0,\alpha]$ sur $[f(0), f(\alpha)] = [1,\alpha]$.

d) Il faut d'abord montrer que tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $[0,\alpha]$. Cela résulte du fait que u_0 appartient à cet intervalle et que f applique $[0,\alpha]$ dans lui-même. On a donc

$$u_n \in [0,\alpha] \implies u_{n+1} = f(u_n) \in [0,\alpha].$$

En appliquant le résultat de la question *b*) on montre immédiatement que $f(u_n) \geqslant u_n$, ce qui signifie que $u_{n+1} \geqslant u_n$ et que la suite (u_n) est croissante. La suite est aussi majorée par α. Elle donc convergente.

Remarque. On peut aussi, pour montrer que la suite (u_n) est croissante, exploiter le fait que f est croissante. Mais attention, ce seul fait permet seulement de montrer que (u_n) est *monotone,* selon le schéma

$$u_1 < u_0 \Longrightarrow f(u_1) < f(u_0) \Longrightarrow u_2 < u_1 \Longrightarrow f(u_2) < f(u_1) \Longrightarrow u_3 < u_2 \Longrightarrow \cdots$$
$$u_1 > u_0 \Longrightarrow f(u_1) > f(u_0) \Longrightarrow u_2 > u_1 \Longrightarrow f(u_2) > f(u_1) \Longrightarrow u_3 > u_2 \Longrightarrow \cdots$$

Pour montrer que la suite (u_n) est croissante, il faut donc vérifier en plus que $u_1 > u_0$, ce qui est bien entendu le cas pour la suite de l'énoncé.

Soit l la limite de la suite (u_n). Dans la relation

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

le premier membre tend vers l quand n tend vers l'infini et le second vers $f(l)$, puisque la fonction f est continue. On a donc

$$l = f(l)$$

d'où, d'après la question *a*),

$$l = \alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 4. Pour tout x réel on pose

$$f(x) = -x - \frac{\pi}{2}$$
$$g(x) = \arctan x - x$$
$$h(x) = -x + \frac{\pi}{2}.$$

a) Montrer que ces trois fonctions sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer la tangente en $x = 0$ au graphe $y = g(x)$, et la position de ce graphe par rapport à sa tangente.
c) Comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$. Calculer les limites $\lim_{x\to-\infty}(g(x) - f(x))$ et $\lim_{x\to+\infty}(h(x) - g(x))$
d) Sur la même figure, représenter les graphes de f, g et h.

Pour résoudre cet exercice il faut savoir que

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

et connaître les propriétés de la fonction arctan *résumées dans la tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice 4. *a*) Il est évident ou bien connu que la fonction affine $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même : on obtient l'inverse en résolvant l'équation $ax+b = y$, ce qui donne $x = a^{-1}(y-b)$. Ce résultat s'applique aux fonctions f et h.

Puisque $\arctan x$ reste confiné dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, il est évident que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que tout réel est une valeur de g. Autrement dit, g est surjective.

b) La dérivée de g est

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

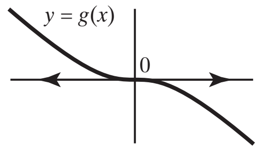
Elle est < 0 partout sauf au point 0 où elle est nulle. La fonction g est donc strictement décroissante, et elle est injective.

Étant à la fois surjective et injective, la fonction g est une bijection.

On a $g'(0) = 0$, la tangente au graphe est horizontale. Dressons un tableau de variation de g

x		0	
g'	$-$	0	$-$
g	$\searrow$		$\searrow$

L'allure du graphe au voisinage de 0 est donc la suivante :

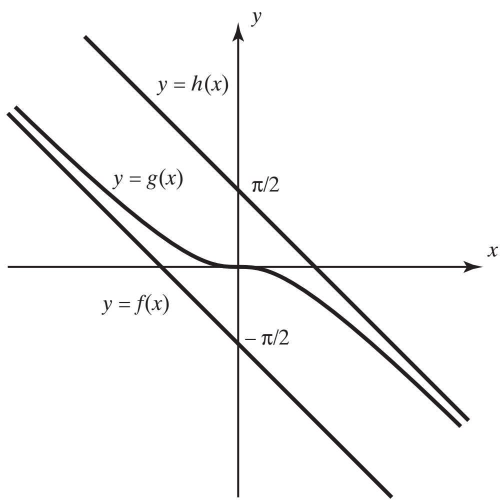


Le graphe traverse sa tangente en $x = 0$: il possède un point d'inflexion.

c) On sait que
$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}.$$
On a donc
$$f(x) < g(x) < h(x)$$
pour tout x.

On sait par ailleurs que
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$
On en déduit que
$$\lim_{x\to-\infty} [g(x) - f(x)] = \lim_{x\to-\infty} \left[\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.$$
De même
$$\lim_{x\to+\infty} [h(x) - g(x)] = 0.$$

d) Graphes de f, g, h :



Exercice 5. On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en posant
$$f(x,y) = (x-y, 2x+y, x+y)$$
et l'application $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en posant
$$g(x,y,z) = (3x - 3y + 4z, x + 3y - z).$$
a) Montrer que f est injective et non surjective.
b) Montrer que l'image de f est un plan de $\mathbb{R}^3$
c) Montrer que g est surjective et non injective.
d) Montrer que la composée $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection.
e) Montrer que la composée $f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ n'est ni injective, ni bijective.

Exercice 5. *a*) Montrons que f est injective. Soient (x,y) et (x',y') tels que $f(x,y) = f(x',y')$. On a
$$(x-y, 2x+y, x+y) = (x'-y', 2x'+y', x'+y')$$
c'est-à-dire
$$\begin{aligned} x - y &= x' - y' \\ 2x + y &= 2x' + y' \\ x + y &= x' + y' \end{aligned}$$

En additionnant la 1re et la 3e ligne, on obtient $2x = 2x'$, d'où $x = x'$. En les soustrayant, on obtient $-2y = -2y'$, d'où $y = y'$.

On a donc $(x,y) = (x',y')$, ce qui montre que f est injective.

Pour montrer que f n'est pas surjective, il faut par exemple trouver un point $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas une valeur de f, c'est-à-dire tel que le système

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{aligned} x-y &= \mathrm{X} \\ 2x+y &= \mathrm{Y} \\ x+y &= \mathrm{Z} \end{aligned}$$

n'ait pas de solution. Appliquons à ce système la méthode du pivot pour trouver un système équivalent plus simple.

$$(\mathrm{S}) \iff (\mathrm{S}') \left\{ \begin{array}{ll} x-y = \mathrm{X} & \\ 3y = \mathrm{Y}-2\mathrm{X} & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1) \\ 2y = \mathrm{Z}-\mathrm{X} & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1) \end{array} \right. \iff (\mathrm{S}'') \left\{ \begin{array}{l} x-y = \mathrm{X} \\ 3y = \mathrm{Y}-2\mathrm{X} \\ 0 = \mathrm{Z}-\mathrm{X}-\dfrac{2}{3}(\mathrm{Y}-2\mathrm{X}) \end{array} \right.$$

Si $\mathrm{Z}-\mathrm{X}-\frac{2}{3}(\mathrm{Y}-2\mathrm{X}) \neq 0$, c'est-à-dire si

$$\frac{1}{3}\mathrm{X} - \frac{2}{3}\mathrm{Y} + \mathrm{Z} \neq 0$$

le système n'a pas de solution. L'application f n'est donc pas surjective.

b) En reprenant le système (S'') de la question précédente, on voit que
– si $\frac{1}{3}\mathrm{X} - \frac{2}{3}\mathrm{Y} + \mathrm{Z} \neq 0$ le système (S'') n'a pas de solution, et $(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ n'appartient pas à l'image de f
– si $\frac{1}{3}\mathrm{X} - \frac{2}{3}\mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 0$ le système (S'') a une solution (on tire y de la 2e équation, puis x de la 1re).

L'image de f est donc le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $\frac{1}{3}\mathrm{X} - \frac{2}{3}\mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 0$, ou

$$\mathrm{X} - 2\mathrm{Y} + 3\mathrm{Z} = 0.$$

c) Montrons que g est surjective. Cela revient à montrer que pour tout $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathbb{R}^2$ il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z) = (\mathrm{X},\mathrm{Y})$, ou encore que le système

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} 3x-3y+4z = \mathrm{X} \\ x+3y-z = \mathrm{Y} \end{array} \right.$$

a une solution quels que soient X et Y.

$$(\Sigma) \iff (\Sigma') \left\{ \begin{array}{ll} x+3y-z = \mathrm{Y} & \\ 3x-3y+4z = \mathrm{X} & (\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2) \end{array} \right. \iff (\Sigma'') \left\{ \begin{array}{ll} x+3y-z = \mathrm{Y} & \\ -12y+7z = \mathrm{X}-3\mathrm{Y} & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1) \end{array} \right.$$

On obtient une solution en prenant z quelconque, par exemple $z = 0$, puis $y = -\frac{1}{12}(\mathrm{X}-3\mathrm{Y})$, puis $x = \mathrm{Y} - 3y = \frac{1}{4}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$.

Pour montrer que g n'est pas injective, on peut par exemple chercher $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ tel que

$$g(x,y,z) = g(0,0,0) = (0,0).$$

Cette condition équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-3y+4z = 0 \\ x+3y-z = 0 \end{array} \right.$$

On trouve une solution non nulle en prenant $z = 1$ et en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x-3y = -4 \\ x+3y = 1 \end{array} \right.$$

pour trouver x et y. Il est sûr que ce dernier système a une solution parce que son déterminant, égal à 12, est $\neq 0$.

L'application g n'est donc pas injective.

d) Posons $f(x,y) = (\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$, soit

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= x-y \\ \mathrm{Y} &= 2x+y \\ \mathrm{Z} &= x+y \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} g\circ f(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= g(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \\ &= (3\mathrm{X}-3\mathrm{Y}+4\mathrm{Z},\mathrm{X}+3\mathrm{Y}-\mathrm{Z}) \\ &= (3(x-y)-3(2x+y)+4(x+y),(x-y)+3(2x+y)-(x+y)) \\ &= (x-2y,6x+y) \end{aligned}$$

Dire que $g\circ f$ est une bijection, c'est exactement dire que le système

$$\begin{cases} x-2y &= a \\ 6x+y &= b \end{cases}$$

a une solution unique quels que soient a et b. C'est bien le cas parce que le déterminant du système, égal à 13, est non nul.

e) L'application composée $f\circ g$ n'est pas injective parce que g n'est pas injective : il existe (x,y,z) et (x',y',z') différents tels que

$$g(x,y,z) = g(x',y',z')$$

et on a aussi

$$(f\circ g)(x,y,z) = (f\circ g)(x',y',z').$$

Elle n'est pas non plus surjective : l'image de $f\circ g$ est forcément contenue dans celle de f qui est le plan d'équation $x-2y+3z=0$, elle ne peut donc pas être égale à tout $\mathbb{R}^3$.

Barême.

Question de cours 1. 2,5 points. *a*) 1. *b*) 1. *c*) 0,5.

Question de cours 2. 3 points. *a*) 2. *b*) 1.

Question de cours 3. 1 point.

Exercice 1. 2 points.

Exercice 2. 2 points. *a*) 1. *b*) 2.

Exercice 3. 6 points. *a*) 2. *b*) 2. *c*) 1. *d*) 1.

Exercice 4. 5 points. *a*) 2. *b*) 2. *c*) 1. *d*) 1.

Exercice 5. 8 points. (En fait, hors barême.) *a*) 2. *b*) 1. *c*) 2. *d*) 2. *e*) 1.