PARIS 7 MT1
2010-2011 Section E

EXAMEN PARTIEL DU 20 NOVEMBRE 2010

(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Question de cours. Donner les définitions suivantes :
a) application injective ;
b) application surjective ;
c) application bijective.
Donner un exemple
d) d'une application injective non bijective ;
e) d'une application surjective non injective.

Question de cours. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On dit que f est
a) injective si tout élément de F (l'ensemble d'arrivée) a au plus un antécédent ;
b) surjective si tout élément de F a au moins un antécédent ;
c) bijective si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F possède exactement un antécédent.

d) On sait qu'une application est injective si deux éléments différents de l'ensemble de départ ont des images différentes, surjective si son image coïncide avec l'ensemble d'arrivée.

La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective, car elle est strictement croissante, et elle n'est pas surjective car son image est $]0, +\infty[$. *Autre exemple.* L'application $x \mapsto x$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

e) La fonction partie entière, considérée comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. *Autre exemple.* La fonction $x \mapsto x^3 - x$, considérée comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette application est surjective en vertu du fait que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et du théorème des valeurs intermédiaires. Elle n'est pas injective puisque $f(0) = f(1)$.

Exercice 1. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ trois points du plan. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) D est barycentre de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ avec les coefficients $-1, 1, 1$;
(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$;
(iii) les segments AD et BC ont même milieu.
(On demande une démonstration directe qui n'utilise pas les propriétés connues du parallélogramme.)

Exercice 1. Rappelons pour commencer qu'un point G est barycentre des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ avec les coefficients α, β, γ $(\alpha + \beta + \gamma = 1)$ si pour tout point O on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ou encore si

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{GB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{GC}} = 0.$$

Puisque $(-1) + 1 + 1 = 1$, la condition (i) s'écrit

$$-\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

ou à

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} - \overrightarrow{\mathrm{DA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

c'est-à-dire à

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

On a donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Fixons un point O. Le milieu I de AC est défini par $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$, le milieu J de BC est défini par $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$. On a donc

$$\mathrm{I} = \mathrm{J} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

autrement dit (iii) $\Leftrightarrow$ (ii).

Exercice 2. Soient A, B trois points du plan et C le barycentre de ces trois points avec les coefficients α et β ($\alpha+\beta=1$.)

Montrer que la quantité
$$f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - \alpha\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2$$
est une constante (indépendante de M).

Exercice 2. Utilisons la relation de Chasles sous la forme
$$\overrightarrow{\mathrm{MA}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}.$$
On tire de là
$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}^2$$
d'où
$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) &= \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - \alpha\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 \\ &= \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - \alpha\overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - 2\alpha\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} - 2\beta\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{CB}}^2 \\ &= (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{MC}}\,.\,(\alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{CB}}) - \alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{CB}}^2 \end{aligned}$$
d'où, puisque $\alpha+\beta=1$ et $\alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$,
$$f(\mathrm{M}) = -\alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}}^2 - \beta\overrightarrow{\mathrm{CB}}^2,$$
où le second membre est bien une quantité indépendante de M.

Exercice 3. On considère les vecteurs
$$\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\m\end{pmatrix}.$$

a) À quelle condition sur m ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

b) On suppose que cette condition n'est pas satisfaite. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix}\mathrm{X}\\\mathrm{Y}\\\mathrm{Z}\end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

On considère maintenant le système d'équations linéaires

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} 2x+y+z = \mathrm{X} \\ x+2y+2z = \mathrm{Y} \\ x+y+mz = \mathrm{Z} \end{cases}$$

c) À quelle condition sur m ce système possède-t-il une solution unique ?
d) Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, à quelle condition sur X, Y, Z le système possède-t-il une solution ?
e) Lorsque cette condition est réalisée, l'ensemble des solutions est-il un point, une droite, un plan de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. *a*) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base si leur déterminant
$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&m\end{vmatrix}$$
est nul. En développant par rapport à la troisième colonne, on obtient
$$\mathrm{D} = 1.\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} + m.\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix} = -1-2+3m = 3m-3,$$
soit
$$\mathrm{D} = 3(m-1).$$
Les vecteurs donnés forment donc une base si $m \neq 1$.

b) On suppose que la condition précédente n'est pas satisfaite, c'est-à-dire que $m=1$.

On a dans ce cas $\vec{w} = \vec{v}$, et il revient au même de dire que $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ est combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ou que $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ est combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour que cette dernière propriété se réalise, il faut et il suffit, *puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants,* qu'on ait

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{U}}) = 0,$$

soit

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathrm{X} \\ 1 & 2 & \mathrm{Y} \\ 1 & 1 & \mathrm{Z} \end{vmatrix} = 0$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on voit que cette condition s'écrit

$$-\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 3\mathrm{Z} = 0.$$

c) Le système (S) possède une solution unique si son déterminant est $\neq 0$. On observe que ce déterminant est le déterminant D calculé en *a*).

Le système (S) a donc une solution unique si et seulement si $m \neq 1$.

d) On suppose la condition précédente non satisfaite, c'est-à-dire $m = 1$.

Première solution. On observe que le système s'écrit

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{U}}.$$

Dire que le système admet une solution, c'est donc dire que $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Lorsque $m = 1$, on a $\vec{w} = \vec{v}$, et il revient au même de dire que $\overrightarrow{\mathrm{U}}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a vu au *b*) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas est

$$-\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 3\mathrm{Z} = 0.$$

Deuxième solution. Lorsque $m = 1$, le système (S) s'écrit

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \begin{cases} 2x + y + z = \mathrm{X} \\ x + 2y + 2z = \mathrm{Y} \\ x + y + z = \mathrm{Z} \end{cases}$$

Étudions ce système au moyen de la méthode du pivot. On a

$$(\mathrm{S}_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \mathrm{Z} & (\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3) \\ 2x + y + z = \mathrm{X} \\ x + 2y + 2z = \mathrm{Y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \mathrm{Z} \\ -y - z = \mathrm{X} - 2\mathrm{Z} & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1) \\ y + z = \mathrm{Y} - \mathrm{Z} & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \mathrm{Z} \\ -y - z = \mathrm{X} - 2\mathrm{Z} \\ 0 = \mathrm{X} + \mathrm{Y} - 3\mathrm{Z} & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Le dernier système ne peut pas avoir de solution lorsque $\mathrm{X} + \mathrm{Y} - 3\mathrm{Z} \neq 0$. En revanche, si $\mathrm{X} + \mathrm{Y} - 3\mathrm{Z} = 0$, la troisième équation est satisfaite, et on obtient une solution en fixant arbitrairement z, puis en tirant y en fonction de z dans la deuxième équation, et enfin en tirant x de la première équation. Une condition nécessaire et suffisante pour que (S_1) ait une solution est donc

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} - 3\mathrm{Z} = 0.$$

e) Lorsque $m = 1$ et $\mathrm{X} + \mathrm{Y} - 3\mathrm{Z} = 0$, le système (S) se réduit à un système de deux équations :

$$\begin{aligned} x + y + z &= \mathrm{Z} \\ -y - z &= \mathrm{X} - 2\mathrm{Z} \end{aligned}$$

(voir *d*), *deuxième solution*). L'ensemble des solutions (x, y, z) est l'intersection de deux plans non parallèles de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. *a*) Donner un repère $(\mathrm{A},\vec{u},\vec{v})$ du plan P de $\mathbb{R}^3$ défini par la représentation paramétrique

$$\begin{aligned} x &= 2+s-2t \\ y &= -1+s+t \\ z &= 3+s-t \end{aligned}$$

b) Donner une équation cartésienne de P.
c) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à P. Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. *a*) La représentation paramétrique donnée s'écrit

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + s\vec{u} + t\vec{v} \quad (s,t \in \mathbb{R}),$$

si on pose

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que $(\mathrm{A},\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan P (dans lequel le point M a pour coordonnées s et t). Si on fait confiance à l'énoncé, qui affirme que la représentation paramétrique donnée est la représentation paramétrique d'un plan, il est inutile de vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, c'est automatique.

b) *Première solution.* Pour que le point M appartient au plan P, il faut et il suffit que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou encore, en tenant compte du fait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants, que $\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0$. En coordonnées cette condition s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & x-2 \\ 1 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin

$$-2x - y + 3z - 6 = 0.$$

Deuxième solution. Le point $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au plan P s'il existe des réels s et t tels que

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

ou encore tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ou, ce qui revient au même, si le système d'équations linéaires

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} s-2t = x-2 \\ s+t = y+1 \\ s-t = z-3 \end{cases},$$

où les inconnues sont s et t possède une solution. Ce système est équivalent successivement aux systèmes

$$\begin{cases} s-2t = x-2 \\ 3t = (y+1)-(x-2) & (\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1) \\ t = (z-3)-(x-2) & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s-2t = x-2 \\ t = (z-3)-(x-2) & (\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3) \\ 3t = (y+1)-(x-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s-2t = x-2 \\ t = (z-3)-(x-2) \\ 0 = (y+1)+2(x-2)-3(z-3) & (\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

Le système (Σ) possède donc une solution si et seulement si $(y+1)+2(x-2)-3(z-3)$, ce qui s'écrit

$$2x+y-3z+6=0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{M} \in \mathrm{P}$. C'est donc l'équation (ou *une* équation) de P.

c) On obtient un vecteur normal $\vec{n}$ à P en prenant pour coordonnées de $\vec{n}$ les cooefficients de x, y, z dans l'équation de P :

$$\vec{n}=(2,1,-3).$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendants et que $\vec{n}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (sinon le vecteur $\vec{n}$ serait à la fois orthogonal à P et porté par P, et il serait nul), les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ sont indépendants, et ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On arrive au même résultat en vérifiant que $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{n})=0$.

Exercice 5. Soit $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x^3-mx+1$.
a) Lorsque $m=0$, la fonction f est-elle injective ?
b) Lorsque $m=3$, la fonction f est-elle injective ?
c) Déterminer, suivant la position de m dans $\mathbb{R}$ par rapport à 0 et 3, si f est injective ou non-injective.

Exercice 5. *a*) Lorsque $m=0$, la fonction f s'écrit $f(x)=x^3+1$ et elle est strictement croissante parce que sa dérivée $f'(x)=3x^2$ est strictement positive sauf en un point, le point $x=0$. Elle est donc injective.

b) Lorsque $m=3$, la fonction f s'écrit $f(x)=x^3-3x+1$ et on a $f'(x)=3(x^2-1)$. La dérivée de f est strictement négative sur $[-1,1]$, sauf aux extrémités, où elle vaut 0. On en déduit que f est strictement décroissante sur $[-1,1]$. Elle est donc injective.

c) Distinguons trois cas.

1) $m<0$. On a $f'(x)=3x^2-m\geqslant|m|$. la dérivée de f est strictement positive, et f est strictement croissante, donc injective.

2) $0<m<3$. La dérivée $f'(x)=3x^2-m=3(x^2-\frac{m}{3})$ s'annule dans l'intervalle $[-1,1]$ aux points $x=\pm\sqrt{\frac{m}{3}}$, qui sont intérieurs à l'intervalle. D'où le tableau de variation de f :

x	-1		$-\sqrt{\frac{m}{3}}$		$\sqrt{\frac{m}{3}}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Il résulte du tableau de variation et du théorème des valeurs intermédiaires que toute valeur strictement comprise entre $\max(f(-1), f(\sqrt{\frac{m}{3}})$ et $f(\sqrt{\frac{m}{3}}$ est atteinte au moins deux fois. La fonction f n'est pas injective.

3) $m>3$. La dérivée $f'(x)$ s'annule toujours aux points $x=\pm\sqrt{\frac{m}{3}}$, mais ceux-ci sont en-dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Sur $[-1,1]$; on a $x^2\leqslant 1<\frac{m}{3}$ et $f'(x)<0$. La fonction f est strictement décroissante, et injective.

Exercice 6. Quelles sont les variables libres et les variables muettes dans les expressions ou les assertions suivantes ?
a) Si $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=0$, alors $\alpha=\beta=\gamma=0$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{an-b}{bn-a}$.
c) $\forall x,\ x\in\mathrm{A}\Rightarrow x\in\mathrm{B}$.

Exercice 6. *a*) Les variables $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont libres, les variables α,β,γ sont muettes.

b) Les variables a et b sont libres, la variable n est muette.

c) Les variables A et B sont libres, la variable x est muette.

Exercice 7. Soient $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ et $g:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$. On suppose que $g\circ f$ est une bijection.
Montrer que f est injective et que g est surjective.

Exercice 7. Soient x et x' deux éléments de E tels que $x\neq x'$. Puisque $g\circ f$ est une bijection, on a $g(f(x))\neq g(f(x'))$. On ne peut donc pas avoir $f(x)=f(x')$, car dans ce cas on aurait $g(f(x))=g(f(x'))$. on a donc $f(x)\neq f(x')$, ce qui montre que f est injective.

Soit z un élément de G. Puisque $g\circ f$ est une bijection, il existe un élément x unique tel que $g(f(x))=z$. Il en résulte que $f(x)$ est un antécédent de z par g. On a ainsi montré que tout élément de G possède un antécédent par g, autrement dit que g est surjective.

Exercice 8. On rappelle que le cercle de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que IM = R, ou $\overrightarrow{\mathrm{IM}}^2 = \mathrm{R}^2$, et que le cercle de diamètre AB est le cercle centré au milieu I de AB et qui passe par A et B

a) Montrer qu'un point appartient au cercle de diamètre AB si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$.

On considère maintenant une droite D du plan, un point O de cette droite, et deux points distincts A et B situés sur D du même côté de O, tels que $\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OB} = b$. Soit en outre I le milieu de AB.

b) Soient P et Q les point où le cercle de diamètre OI rencontre le cercle de diamètre AB. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$ sont orthogonaux.

c) En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}^2$ et que OP < OI.

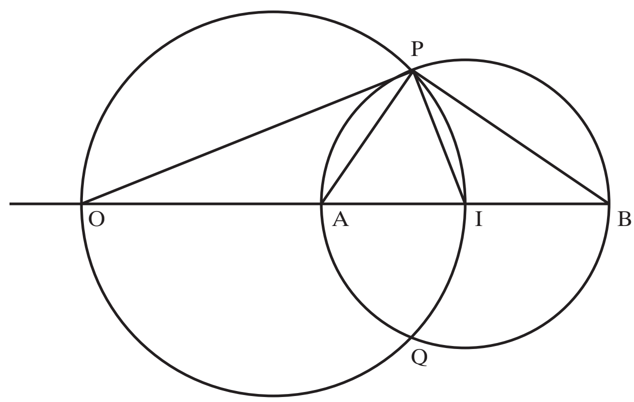
d) Déduire de ce qui précède une démonstration géometrique de l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 8. *a*) Le centre du cercle de diamètre AB est I, et son rayon est R = IA = IB. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}})\,.\,(\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}})\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{MI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}})\,.\,(\overrightarrow{\mathrm{MI}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{MI}}^2-\overrightarrow{\mathrm{IA}}^2\\ &= \overrightarrow{\mathrm{IM}}^2-\mathrm{R}^2\end{aligned}$$

où R est le rayon du cercle de diamètre AB.

Par suite, dire que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ équivaut à dire que IM = R, ou encore que M appartient au cercle de diamètre AB.



b) On applique le résultat démontré en *a*). Puisqu P appartient au cercle de diamètre OI, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{IP}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{PI}} = 0.$$

c) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OI}}+\overrightarrow{\mathrm{IA}})\,.\,(\overrightarrow{\mathrm{OI}}+\overrightarrow{\mathrm{IB}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OI}}^2-\mathrm{R}^2\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OI}}^2-\mathrm{IP}^2\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}^2 \qquad \text{(théorème de Pythagore)}\end{aligned}$$

d) On a d'une part

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OP}}^2} = \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}} = \sqrt{ab}$$

et d'autre part, en vertu du théorème de Pythagore et du fait que IP = R > 0 (ce qui provient du fait que $a \neq b$),

$$\mathrm{OP} < \mathrm{OI} = \frac{a+b}{2},$$

d'où

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

(inégalité arithmético-géométrique).