

SECTION C (T. Joly) - Amphis 2A, 6C et 9E

Partiel du 13 novembre 2010

Durée : 3 heures.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices
et les téléphones portables.*

Exercice 1 Questions de cours.

1. Soit n un entier naturel non nul et soient z_0 et z des nombres complexes non nuls tels que $z_0^n = z$.
Donner toutes les racines n -ièmes de z .
2. Soit F une partie de \mathbb{R}^n . À quelles conditions F est-il un sous-espace de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ?
3. Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner la définition de la surjectivité de f .
Puis donner un exemple d'application surjective de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$.

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$\frac{1}{2}z^2 + 2\sqrt{2}z + 3 + i = 0.$$

Exercice 3 On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

1. Décrire les sous-ensembles suivants de \mathbb{R} :

$$f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(]0, +\infty[), f^{-1}([-1, 0]), f([-\pi/6, \pi/3[), f([\pi/2, \pi]).$$

2. Donner un exemple de partie A de $[-\pi, \pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}(f(A)) \neq A.$$

Exercice 4

1. Soit $n \geq 3$ un entier, montrer que le polynôme : $P(x) = nx^n - (n+1)x^{n-1} - x + 2$ est divisible par $(x-1)^2$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier, montrer que le polynôme : $Q(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 - 5x + 6$. [On pourra commencer par vérifier que 2 et 3 sont des racines de $Q(x)$.]

Exercice 5

1. Donner la forme polaire des racines complexes du polynôme $A(x) = x^5 - 1$.
2. Justifier l'existence du polynôme B tel que $A(x) = (x-1)B(x)$, puis calculer B par une division euclidienne.
3. Dédire des questions précédentes la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
Puis donner la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les trois questions suivantes, on veut établir d'une autre manière la factorisation de B afin de répondre à la question finale de l'exercice.

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $E(z) = z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right]$.
Montrer que E est un polynôme que l'on calculera.
5. Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + x - 1$.
6. A l'aide du changement de variable $x = z + \frac{1}{z}$, en déduire une factorisation de $E(z)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
7. En utilisant l'unicité de la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 6 On considère la partie suivante de \mathbb{R}^4 :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - 2z + 4t = 0 \text{ et } 2x + 5y + 4z - t = 0 \right\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer une base de F .

Exercice 7 On considère les vecteurs de \mathbb{R}^4 : $u_1 = (1, -2, 1, -3)$, $u_2 = (3, -7, 4, -5)$ et $u_3 = (2, -1, 0, -9)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de \mathbb{R}^4 .
3. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1, u_2, u_3) .