

Correction du partiel du 13/11/10

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit n un entier naturel non nul et soient z_0 et z des nombres complexes non nuls tels que $z_0^n = z$.
Donner toutes les racines n -ièmes de z .
2. Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, à quelles conditions F est-il un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?
3. Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner la définition de la surjectivité de f .
Puis donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Correction :

1. z_0 est une racine n -ième de z , donc les n racines n -ièmes de z s'obtiennent en multipliant z_0 par chacune des n racines n -ièmes de l'unité, ce sont donc les n nombres $z_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
2. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si le vecteur nul appartient à F et F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire pour tous réels λ et μ , pour tous vecteurs x et y de F , $\lambda x + \mu y \in F$.
On peut également dire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si F n'est pas vide et F est stable pour l'addition des vecteurs et pour la multiplication d'un vecteur par un réel.
3. $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si tout élément de F a au moins un antécédent par f dans E .
Formulation symbolique : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.

Exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$: la fonction exponentielle.

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante en exprimant toutes les racines sous forme algébrique :

$$\frac{1}{2}z^2 + 2\sqrt{2}z + 3 + i = 0.$$

Correction :

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 2(3 + i) = 2 - 2i$.

Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x + iy$ avec x et y réels. On a les équivalences :

$$(x + iy)^2 = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{2} + 1 \\ y^2 = \sqrt{2} - 1 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Les racines carrées de Δ sont donc $\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ et $-\sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$z_1 = -2\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad \text{et} \quad z_2 = -2\sqrt{2} - \sqrt{\sqrt{2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

Exercice 3.

On considère l'application :

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x.$$

1. Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(]0, +\infty[), \quad f^{-1}([-1, 0]), \quad f([-\pi/6, \pi/3]), \quad f([\pi/2, \pi]).$$

2. Donner un exemple de partie A de $[-\pi, \pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}(f(A)) \neq A.$$

Correction : D'après les propriétés de la fonction cosinus, le tableau de variation de f est :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	-1	0	1	0	-1

Ce tableau de variation et la continuité de f justifient les réponses suivantes :

- $f^{-1}(\{0\}) = \{-\frac{\pi}{2}\} \cup \{\frac{\pi}{2}\}$, $f^{-1}(]0, +\infty[) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f^{-1}([-1, 0]) = [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$.
 $f([-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]) =]\frac{1}{2}, 1]$ car $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} < \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $f([\frac{\pi}{2}, \pi]) = [-1, 0]$.
- Par exemple $A = \{\frac{\pi}{2}\}$, on a $f(A) = \{0\}$ et $f^{-1}(\{0\}) = \{-\frac{\pi}{2}\} \cup \{\frac{\pi}{2}\}$ donc $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

Exercice 4.

- Soit $n \geq 3$ un entier, montrer que le polynôme $P(x) = nx^n - (n+1)x^{n-1} - x + 2$ est divisible par $(x-1)^2$.
- Soit $n \geq 1$ un entier, montrer que le polynôme $Q(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 - 5x + 6$.
Indication : on pourra commencer par vérifier que 2 et 3 sont des racines de $Q(x)$.

Correction :

- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$ si et seulement si 1 est une racine au moins double de P c'est-à-dire si $P(1) = P'(1) = 0$.
Or $P(1) = n - (n+1) - 1 + 2 = 0$,
et, comme $n-1 \geq 1$, $P'(x) = n^2x^{n-1} - (n+1)(n-1)x^{n-2} - 1$
donc $P'(1) = n^2 - (n+1)(n-1) - 1 = n^2 - (n^2 - 1) - 1 = 0$.
Conclusion : $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$

2. Le polynôme unitaire $T(x) = x^2 - 5x + 6$ a pour racines 2 et 3 donc sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est $T(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Il suit que $T(x)$ divise $Q(x)$ si et seulement si $Q(x)$ est factorisable par $(x - 2)(x - 3)$ c'est-à-dire si 2 et 3 sont des racines de $Q(x)$.

$$\text{Or } Q(2) = (2 - 3)^{2n} + (2 - 2)^n - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 0$$

$$\text{et } Q(3) = (3 - 3)^{2n} + (3 - 2)^n - 1 = 1^n - 1 = 0.$$

Conclusion : $Q(x)$ est divisible par $x^2 - 5x + 6$.

Exercice 5.

- Donner la forme polaire des racines complexes du polynôme $A(x) = x^5 - 1$.
- Justifier l'existence du polynôme B tel que $A(x) = (x - 1)B(x)$, puis calculer B par une division euclidienne.
- Déduire des questions précédentes la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Puis donner la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les trois questions suivantes, on veut établir d'une autre manière la factorisation de B afin de répondre à la question finale de l'exercice.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $E(z) = z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right]$.

Montrer que E est un polynôme que l'on calculera.

- Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + x - 1$.
- A l'aide du changement de variable $x = z + \frac{1}{z}$, en déduire une factorisation de $E(z)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- En utilisant l'unicité de la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.

Correction :

- Les racines complexes du polynôme $A(x) = x^5 - 1$ sont les racines cinquième de l'unité, c'est-à-dire les cinq nombres suivants :

$$u_k = e^{i \frac{2k\pi}{5}} \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, 4\}.$$

Ce sont toutes des racines simples.

- Le polynôme $A(x) = x^5 - 1$ a pour racine 1 donc il est divisible par $x - 1$ ce qui signifie qu'il existe un polynôme B tel que $A(x) = (x - 1)B(x)$.

On peut calculer B en effectuant la division euclidienne de A(x) par x - 1 :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^5 \\
 \ominus \quad x^5 - x^4 \\
 \hline
 x^4 \\
 \ominus \quad x^4 - x^3 \\
 \hline
 x^3 \\
 \ominus \quad x^3 - x^2 \\
 \hline
 x^2 \\
 \ominus \quad x^2 - x \\
 \hline
 x \\
 \ominus \quad x - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 -1 \\
 -1 \\
 -1 \\
 -1 \\
 -1 \\
 -1 \\
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left| \quad \begin{array}{l}
 x - 1 \\
 \hline
 x^4 + x^3 + x^2 + x + 1
 \end{array}
 \right.$$

On obtient $B(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. D'après le 1., la factorisation de A(x) dans $\mathbb{C}[X]$ est $A(x) = \prod_{k=0}^4 (x - e^{i\frac{2k\pi}{5}}) = (x - 1) \prod_{k=1}^4 (x - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$.

Par identification, on en déduit que la factorisation de B(x) dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$B(x) = \prod_{k=1}^4 (x - e^{i\frac{2k\pi}{5}})$$

La factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$ se déduit de celle dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs correspondants aux racines non réelles conjuguées, i.e. u_1 et u_4 , u_2 et u_3 , ce qui donne :

$$(x - u_1)(x - u_4) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(u_1)x + |u_1|^2 = x^2 - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5}\right)x + 1$$

$$(x - u_2)(x - u_3) = x^2 - 2 \operatorname{Re}(u_2)x + |u_2|^2 = x^2 - 2 \left(\cos \frac{4\pi}{5}\right)x + 1$$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$B(x) = \left(x^2 - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{5}\right)x + 1\right) \left(x^2 - 2 \left(\cos \frac{4\pi}{5}\right)x + 1\right).$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, $E(z) = (z^2 + 1)^2 + z^3 + z - z^2 = z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z - z^2 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$
On en déduit que E est le polynôme B.

5. $P(x) = x^2 + x - 1$ a pour discriminant 5 et pour racines $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

On en déduit la factorisation suivante : $P(x) = \left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $x = z + \frac{1}{z}$, d'après la question précédente,

$$E(z) = z^2 P(x) = z^2 \left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = z^2 \left(z + \frac{1}{z} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \left(z + \frac{1}{z} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{Donc } E(z) = \left(z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1\right) \left(z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1\right) \quad (\text{I}).$$

Comme $E(z) = B(z)$, (I) est une factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$ en deux polynômes de degré 2. Ces deux polynômes sont irréductibles sinon, dans la question 3, on aurait trouvé au moins un polynôme de degré 1 dans la factorisation en polynômes irréductibles de B.

On en conclut que (I) est la factorisation de E et B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

7. Comme la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est unique, on peut identifier les facteurs obtenus dans les questions 3 et 6. On en déduit que $\{-2 \cos \frac{2\pi}{5}, -2 \cos \frac{4\pi}{5}\} = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. Pour identifier individuellement les éléments de ces deux ensembles, il faut ordonner chaque ensemble.

Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, et que la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a $\cos \frac{2\pi}{5} > 0 > \cos \frac{4\pi}{5}$, donc $-2 \cos \frac{2\pi}{5} < 0 < -2 \cos \frac{4\pi}{5}$.

De plus $\sqrt{5} > 1$ donc $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en conclut d'une part que $-2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

et d'autre part que $-2 \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Enfin, comme $\cos \frac{4\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5})$, il suit que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Conclusion : $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 6.

On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - 2z + 4t = 0 \text{ et } 2x + 5y + 4z - t = 0\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F .

Correction :

1. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à 3 inconnues.

Remarque : les propriétés de SEV peuvent aussi se vérifier directement : F contient le vecteur nul et F est stable par combinaison linéaire (à écrire).

2. Soit $v = (x, y, z, t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. $v \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 0 \\ 2x + 5y + 4z - t = 0 \end{cases}$.

On échelonne ce système par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 0 \\ 2x + 5y + 4z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 4t = 0 & (L_1) \\ -y + 8z - 9t = 0 & (L_2 - 2L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 22z - 23t = 0 & (L_1 + 3L_2) \\ y - 8z + 9t = 0 & (-L_2) \end{cases}$$

Ce système échelonné admet deux inconnues secondaires z et t . En posant $z = \lambda$ et $t = \mu$, on

$$\text{en déduit que } v \in F \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v = \lambda \begin{pmatrix} -22 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 23 \\ -9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F est donc le plan vectoriel de base (u_1, u_2) avec $u_1 = (-22, 8, 1, 0)$ et $u_2 = (23, -9, 0, 1)$.

Exercice 7.

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, -2, 1, -3)$, $u_2 = (3, -7, 4, -5)$ et $u_3 = (2, -1, 0, -9)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1, u_2, u_3) .

Correction :

1. Soient α_1, α_2 et α_3 quelconques dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (1).

En notant les vecteurs en colonne, (1) s'écrit : $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On échelonne ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ -2 & -7 & -1 & | & 0 \\ 1 & 4 & 0 & | & 0 \\ -3 & -5 & -9 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 + 3L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + 4L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 9L_3 \end{array}$$

Dans ce système homogène échelonné, chaque inconnue possède un pivot donc il admet une solution unique qui est $(0, 0, 0)$.

On en conclut que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

2. D'après le cours : "Dans un espace vectoriel de dimension n , le cardinal d'une famille génératrice est au moins n ". Or $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 et (u_1, u_2, u_3) est de cardinal 3 donc cette famille ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^4$.
3. On recherche les vecteurs $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ qui sont des combinaisons linéaires de (u_1, u_2, u_3) , c'est-à-dire tels qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant $(x, y, z, t) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ (2).

On échelonne le système (2) par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & x \\ -2 & -7 & -1 & | & y \\ 1 & 4 & 0 & | & z \\ -3 & -5 & -9 & | & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & x \\ 0 & -1 & 3 & | & 2x + y \\ 0 & 1 & -2 & | & -x + z \\ 0 & 4 & -3 & | & 3x + t \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 + 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & x \\ 0 & 1 & -3 & | & -2x - y \\ 0 & 0 & 1 & | & x + y + z \\ 0 & 0 & 9 & | & 11x + 4y + t \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 + 4L_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & x \\ 0 & 1 & -3 & | & -2x - y \\ 0 & 0 & 1 & | & x + y + z \\ 0 & 0 & 0 & | & 2x - 5y - 9z + t \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 9L_3 \end{array}$$

Ce système échelonné admet des solutions si et seulement si $0 = 2x - 5y - 9z + t$.

On en conclut qu'une équation du sous espace $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ est $2x - 5y - 9z + t = 0$.