

SECTION A — Amphis 1–4–5

Partiel du 13 novembre 2010

Durée : 3 heures.

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices
et les téléphones portables.*

Questions de cours

1. Soient E, F des ensembles (non vides) et $f : E \rightarrow F$ une application. Donner la définition de l'injectivité de f , de la surjectivité de f .
2. Dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition dit-on que les m ($m \leq n$) vecteurs $v_1, \dots, v_m$ forment une famille libre ?
3. Qu'est-ce qu'une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 - i)z - 2 + i = 0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 2

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \rightarrow F$ une application. Après avoir rappelé la définition de l'image directe et de l'image réciproque, montrer que pour toute partie A de E on a l'inclusion suivante : $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(A))$.
2. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

- (a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(]0, +\infty[), f^{-1}([-1, 0]), f([\pi/6, \pi/3]), f([\pi/2, \pi]).$$

- (b) Donner un exemple de partie A de $[-\pi, \pi]$ pour laquelle :

$$f^{-1}(f(A)) \neq A.$$

Exercice 3

1. Déterminer la forme polaire des racines de l'équation $z^5 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$.
2. Dédire de la question précédente les factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^5 - 1$.
3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^5 - 1$ par le polynôme $X - 1$.
4. Dédire des deux questions précédentes l'identité suivante :

$$(\star) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \left(z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cdot z + 1 \right) \left(z^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} \cdot z + 1 \right).$$

5. On se propose à présent de calculer $a = \cos \frac{2\pi}{5}$ et $b = \cos \frac{4\pi}{5}$.

A l'aide de l'identité $(\star)$ de la question précédente calculer $a + b$ et $2ab$, puis en déduire que a, b sont racines du trinôme :

$$P(X) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

6. Déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Exercice 4 On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y - 2z + 4t = 0 \text{ et } 2x + 5y + 4z - t = 0\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de F .

Exercice 5 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, -2, 1, -3)$, $u_2 = (3, -7, 4, -5)$ et $u_3 = (2, -1, 0, -9)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, \text{ et } \forall n \geq 1, T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Ces polynômes s'appellent les *polynômes de Tchebychev* de première espèce. On se propose ici de factoriser $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.
2. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes $T_2(X)$ et $T_3(X)$.
3. En procédant par récurrence, déterminer le degré de $T_n(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer par récurrence le coefficient dominant de $T_n(X)$ (c'est-à-dire le coefficient du terme de plus haut degré).
5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

indication : on pourra utiliser la formule classique suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

6. Déduire de la question précédente que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta).$$

7. Etablir que l'ensemble des racines de $T_n(X)$ est l'ensemble

$$\mathcal{Z}(T_n) = \left\{ \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

indication : on observera que les n réels $\cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$, pour k tel que $0 \leq k \leq n-1$, sont deux à deux distincts.

8. Finalement en déduire la factorisation de $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.