CORRIGÉ DE L'EXAMEN FINAL DU 3 JANVIER 2011
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Exercice 1. Pour x réel on pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
a) Montrer que $f(x) = f(x')$ si et seulement si $x = x'$ ou $x + x' = 3/2$.
b) En déduire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.
c) Montrer que la restriction de f à $\mathbb{Z}$ est injective.

Exercice 1. *a*) On a

$$f(x) = f(x') \iff 2x^2 - 3x + 1 = 2x'^2 - 3x' + 1 \iff 2(x^2 - x'^2) = 3(x - x')$$
$$\iff (x - x')\Big(x + x' - \frac{3}{2}\Big) = 0 \iff x = x' \text{ ou } x + x' = 3/2.$$

b) D'après *a*) on a

$$f(1) = f\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

puisque $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Ceci prouve que la fonction f n'est pas injective.

c) Supposons que $f(x) = f(x')$ avec x et x' dans $\mathbb{Z}$. D'après *a*), on a obligatoirement $x = x'$ ou $x + x' = 3/2$. Mais la somme de deux éléments de $\mathbb{Z}$ est un entier, donc ne peut pas valoir $3/2$. On a donc $x = x'$, ce qui prouve que la restriction de f à $\mathbb{Z}$ est injective.

Exercice 2. On pose $\mathrm{P}(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.
a) Vérifier que P s'annule pour $x = i$ et $x = -i$.
b) Montrer qu'on peut mettre $x^2 + 1$ en facteur dans P.
c) Donner les racines de P et la factorisation complète de P sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. *a*) Puisque $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$ on a

$$\mathrm{P}(i) = i^4 - 2i^3 + 3i^2 - 2i + 2 = 1 + 2i - 3 - 2i + 2 = 0.$$

Puisque P est à coefficients réels, on a $\mathrm{P}(-i) = \mathrm{P}\left(\overline{i}\right) = \overline{\mathrm{P}(i)} = 0$.

b) D'après le cours, on sait que si x_1 et x_2 sont deux racines distinctes d'un polynôme P, on peut mettre $(x - x_1)(x - x_2)$ en facteur dans P. Ici, on peut donc mettre $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ en facteur dans P.

c) On peut donc écrire d'après *b*)

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c),$$

où a, b et c sont des coefficients à calculer. En identifiant les termes de plus haut degré (degré 4), on obtient $a = 1$. En identifiant les termes de plus bas degré (degré 0), on obtient $c = 2$. Enfin, en identifiant les termes de degré 3, on obtient $b = -2$. Le polynôme P se factorise donc sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2).$$

Le discriminant de l'équation du second degré $x^2 - 2x + 2 = 0$ vaut -4 et les racines sont donc $(2+2i)/2 = 1+i$ et $(2 - 2i)/2 = 1 - i$. Le polynôme $x^2 - 2x + 2$ est donc irréductible sur $\mathbb{R}$ et la formule précédente donne la factorisation de P sur $\mathbb{R}$. Les quatre racines complexes de P sont i, $-i$, $1 + i$ et $1 - i$ et la factorisation de P sur $\mathbb{C}$ est donc

$$\mathrm{P}(x) = (x + i)(x - i)(x - 1 - i)(x - 1 + i).$$

Exercice 3. On rappelle le résultat suivant

Soit D *la droite définie par les deux plans* P *et* P′ *d'équations respectives*

$$ax + by + cy + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'y + d' = 0.$$

(i) *Alors le plan* Q *passe par* D *si et seulement s'il possède une équation de la forme*

$$\lambda(ax + by + cy + d) + \mu(a'x + b'y + c'y + d') = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Comme on ne change pas un plan en divisant son équation par λ *on peut reformuler cet énoncé de la façon suivante :*
(ii) *Les plans passant par* D *sont exactement les plans définis par les équations*

(P_m) $\quad ax + by + cy + d + m(a'x + b'y + c'y + d') = 0 \quad (m \in \mathbb{R})$

et

(P') $\quad a'x + b'y + c'y + d' = 0.$

On peut considérer que P′ *est le plan* P_∞ *correspondant à* $m = \infty$ *(division de* μ *par* $\lambda = 0$*).*

a) Donner une démonstration de l'assertion (i). *Si vous ne connaissez pas de démonstration, passez à la suite.*
b) On prend pour P le plan d'équation $2x - y + 4z - 1 = 0$ et pour P′ le plan d'équation $x - 3y - z + 3 = 0$. On demande pour quelles valeurs de m le plan P_m

i) passe par l'origine ;
ii) passe par le point $(1, 1, 1)$;
iii) est parallèle à l'axe Oz ;
iv) est parallèle au plan xOy ;
v) est orthogonal au vecteur $\mathrm{U} = (4, 5, 6)$
vi) est parallèle au vecteur $\mathrm{V} = (1, 0, 1)$.

Exercice 3. *a*) cf. cours.

b) L'équation du plan P_m est

$$2x - y + 4z - 1 + m(x - 3y - z + 3) = 0,$$

soit

$$(2 + m)x - (1 + 3m)y + (4 - m)z - 1 + 3m = 0.$$

i) On en déduit que P_m passe par l'origine si $-1 + 3m = 0$, c'est-à-dire $m = 1/3$.

ii) P_m passe par $(1, 1, 1)$ si $2 - 1 + 4 - 1 + m(1 - 3 - 1 + 3) = 0$, c'est-à-dire $4 + 0 \cdot m = 0$. Le plan P_m ne passe donc par le point $(1, 1, 1)$ pour aucune valeur réelle de m. Par contre, le point $(1, 1, 1)$ est dans P′, on peut considérer que P_m passe par $(1, 1, 1)$ pour $m = \infty$.

iii) P_m est parallèle à Oz si et seulement si le vecteur directeur de Oz, soit $(0, 0, 1)$, satisfait l'équation du plan P_m rendue homogène, c'est-à-dire $(2 + m)x - (1 + 3m)y + (4 - m)z = 0$. On obtient $4 - m = 0$, soit $m = 4$.

iv) P_m est parallèle à xOy si son équation est de la forme $z = \text{const.}$, c'est-à-dire si $2 + m = 0$ et $-1 - 3m = 0$. Ces deux équations étant incompatibles, P_m n'est jamais parallèle à xOy.

v) P_m orthogonal à U signifie que le vecteur normal à P_m et le vecteur U sont colinéaires, soit

$$\frac{2 + m}{4} = \frac{-1 - 3m}{5} = \frac{4 - m}{6}.$$

L'égalité des deux premiers termes conduit à $m = -14/17$ et celle des deux derniers à $m = -2$. Cela ne se produit donc jamais.

vi) On écrit que le vecteur normal à P_m est orthogonal à V, soit

$$\begin{pmatrix} 2 + m \\ -1 - 3m \\ 4 - m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + m + 4 - m = 0.$$

C'est impossible. (Mais V est parallèle à P′, on peut considérer que $m = \infty$ est solution.)

Exercice 4. On considère une fonction f définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [\alpha, \beta]$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

i) f est trois fois dérivable ;
ii) $f' > 0$ sur I
iii) $f'' > 0$ sur I ;
iv) $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède dans I une solution unique, qu'on notera s.
b) Faire une figure représentant une fonction f satisfaisant les conditions i) à iv).
c) Étant donné un point a de I, montrer que la tangente au point d'abscisse a au graphe de f coupe l'axe des x au point d'abscisse

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Dans la suite de cet exercice, on pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

d) Montrer que si $s \leqslant x \leqslant \beta$, alors $s \leqslant g(x) \leqslant x$.
e) On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = \beta$, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geqslant 0$. Montrer que cette suite a pour limite s.
f) Calculer $g(s)$ et $g'(s)$. Exprimer $g''(s)$ en fonction de f et de ses dérivées.
g) Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (développement limité de Taylor-Young) .
h) Soit K un réel tel que $\mathrm{K} > |g''(s)|$. En appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, montrer qu'il existe un entier N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$ on ait

$$0 \leqslant x_{n+1} - s \leqslant \mathrm{K}(x_n - s)^2$$

i) Montrer qu'il existe un entier N′ tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}'$ on ait

$$0 \leqslant \mathrm{K}(x_n - s) \leqslant \frac{1}{10}.$$

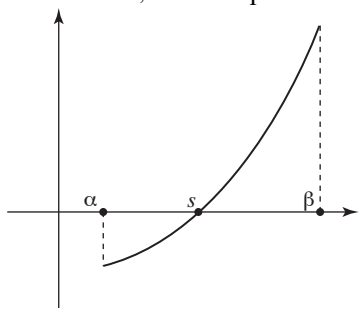
j) On pose $\mathrm{N}'' = \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$. Montrer qu'à partir de N″ la convergence de x_n vers s est très rapide :

$$\mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''} - s) \leqslant \frac{1}{10},\ \mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''+1} - s) \leqslant 10^{-2},\ \mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''+2} - s) \leqslant 10^{-4},\ \mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''+3} - s) \leqslant 10^{-8},\ \text{etc.}$$

La méthode de l'exercice (méthode de Newton) est utilisée depuis plus de trois siècles pour résoudre numériquement les solutions d'équations de toutes sortes avec une grande précision. Elle est encore à la base de toutes les commandes de résolution d'équations (sauf les équations linéaires) dans les logiciels modernes.

Exercice 4. *a*) Le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'une fonction continue ne peut passer d'une valeur < 0 à une valeur > 0 qu'en passant par la valeur 0. Comme $f(\alpha) < 0$ et $f(\beta) > 0$, il existe $s \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(s) = 0$. Comme f est strictement croissante, s est unique.

b)



c) L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est

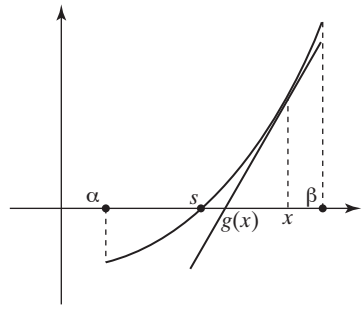
$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Au point où la tangente coupe l'axe des x on a $y = 0$, donc $x - a = -f(a)/f'(a)$ avec $x = a'$, ce qui donne

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

d) On remarque que, d'après *c*), $g(x)$ est l'abscisse du point où la tangente au graphe de f au point d'abscisse x recoupe l'axe des x (cf. figure ci-contre). Puisque $f'' > 0$, la fonction f est convexe, et sa tangente au point d'abscisse x est entièrement sous la courbe, donc

$$g(x) \geqslant s.$$



D'autre part

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x,$$

puisque $f(x) \geqslant 0$ sur $[s, \beta]$ et $f'(x) > 0$.

e) La suite (x_n) est décroissante puisque, d'après *d*), $x_{n+1} = g(x_n) \leqslant x_n$. Elle est minorée par s car $g(x_n) \geqslant s$ d'après *d*). Elle admet donc une limite ℓ qui vérifie $\ell = g(\ell)$ puisque g est continue, soit

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$$

c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. D'après *a*) on a $\ell = s$.

f) On a $g(s) = s$ car $f(s) = 0$. Calculons la dérivée de g :

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Comme $f(s) = 0$ on a $g'(s) = 0$.

En dérivant encore une fois, on a

$$g'' = \frac{(f'f'' + ff''')f' - 2ff''^2}{f'^3}$$

donc (puisque $f(s) = 0$)

$$g''(s) = \frac{f''(s)}{f'(s)}.$$

g) Si h est 2 fois dérivable au point x_0 on a

$$h(x) = h(x_0) + (x - x_0)h'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}h''(x_0) + (x - x_0)^2\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

h) On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction g au point s. Cela donne

$$g(x_n) = g(s) + (x_n - s)g'(s) + \frac{(x_n - s)^2}{2}g''(s) + (x_n - s)^2\varepsilon(x_n),$$

où $\varepsilon(x_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Compte-tenu des résultats de *f*), on a donc

$$0 \leqslant x_{n+1} - s = \frac{(x_n - s)^2}{2}g''(s) + (x_n - s)^2\varepsilon(x_n) \leqslant \Big(\frac{\mathrm{K}}{2} + \varepsilon(x_n)\Big)(x_n - s)^2.$$

Puisque $\varepsilon(x_n)$ est inférieur à $\mathrm{K}/2$ à partir d'un certain rang N, on obtient le résultat demandé.

i) Puisque $x_n \to s$ lorsque $n \to \infty$, on peut rendre $|x_n - s| = x_n - s$ inférieur à $1/10\mathrm{K}$ à partir d'un certain rang N′. Donc, pour $n \geqslant \mathrm{N}'$, on a $0 \leqslant \mathrm{K}(x_n - s) \leqslant \frac{1}{10}$.

j) D'après *i*) on a

$$\mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''} - s) \leqslant \frac{1}{10}$$

D'après *h*) on a

$$\mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''+1} - s) \leqslant \mathrm{K}^2(x_{\mathrm{N}''} - s)^2 \leqslant 10^{-2}$$

et

$$\mathrm{K}(x_{\mathrm{N}''+2} - s) \leqslant \mathrm{K}^2(x_{\mathrm{N}''+1} - s)^2 \leqslant 10^{-4},$$

etc.

Exercice 5. Soit a un réel > 0. Pour x et y réels on pose

$$f(x,y) = ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2)$$

Si on pose $\mathrm{M} = (x,y)$, $\mathrm{A} = (a,0)$, $\mathrm{B} = (-a,0)$, alors

$$f(x,y) = f(\mathrm{M}) = \mathrm{MA}^2.\mathrm{MB}^2$$

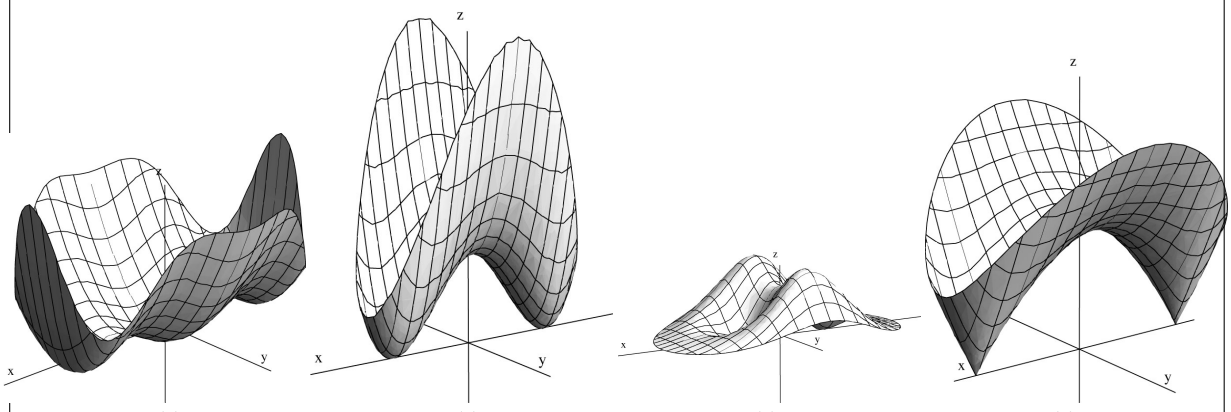
a) Calculer les dérivées partielles de la fonction f.

b) Donner l'équation du plan tangent au graphe de f, autrement dit à la surface d'équation $z = f(x,y)$, au point situé au-dessus du point (x_0, y_0).

c) Déterminer les points critiques de f.

d) Montrer que deux de ces points critiques sont des minimums, et que le troisième est un point-selle (ou col).

e) Lequel de ces graphes représente la fonction f ?



(1) (2) (3) (4)

Exercice 5. *a*) On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x\big(x^2 + y^2 - a^2\big), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y\big(x^2 + y^2 + a^2\big).$$

b) L'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0) est

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

avec $z_0 = f(x_0, y_0)$.

c) En un point critique on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Or $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule pour $x = 0$ ou pour $x^2 + y^2 = a^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule que pour $y = 0$. En reportant $y = 0$ dans l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, on obtient $x = \pm a$. Il y a donc trois points critiques : les points

$$(0,0), \qquad (a,0), \qquad (-a,0).$$

d) On a $f(a,0) = f(-a,0) = 0$. Ces points sont des minimums stricts puisque f est clairement $\geqslant 0$ partout.

On développe f au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \big(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax\big)\big(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax\big) = \big(x^2 + y^2 + a^2\big)^2 - 4a^2x^2 \\ &= a^4 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4a^2x^2 \\ &= a^4 + 2a^2(-x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)\varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$. Comme $-x^2 + y^2$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0)$, l'origine est un point-selle.

e) La surface de la figure (1) a trois minimums et deux points-selle. Elle ne représente donc pas la fonction f. Les surfaces (2), (3) et (4) ont chacune deux minimums et un point-selle. Mais le graphe (3) représente une fonction qui tend vers 0 à l'infini dans la direction de l'axe des x, alors que $f(x,0) = (x-a)^2(x+a)^2 \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$. Le graphe (4) a des « pointes », il représente une fonction non dérivable en ses minimums. C'est donc la surface (2) qui est le graphe de f.

Note. Plusieurs étudiants se sont étonnés que le problème d'analyse de l'examen (exercice 4) porte sur une fonction f générale non explicitée. Pour leur répondre, je citerai Cournot, le fondateur de l'économie

mathématique. Dans un texte où il introduit la fonction de demande F(p) (F(p) est la demande d'un certain produit en fonction du prix p de ce produit), Cournot indique : « puisque tant de causes morales, et qu'on ne peut énumérer ni mesurer, influent sur la loi de demande, il est clair qu'on ne doit pas s'attendre à ce que cette loi puisse être exprimée par une formule algébrique ». Par loi (nous dirions fonction) exprimée par une formule algébrique simple, il désigne les fonctions étudiées au lycée telles que

$$ax + b,\ \ ax^2 + bx + c,\ \ \frac{ax + b}{cx + d},\ \ \text{etc.}$$

Selon lui, « la solution des questions générales auxquelles donne lieu la théorie des richesses, dépend essentiellement, non pas de l'algèbre élémentaire, mais de cette branche de l'analyse qui a pour objet des fonctions arbitraires, assujetties seulement à satisfaire à certaines conditions.»

COURNOT A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses,* Ed. Bizzarri, chez L. Hachette, Librairie de l'Université Royale de France, Paris (cité par Jacques Bair et Valérie Henry, *Modèles mathématiques en gestion,* à paraître en 2011).