# Examen du 7 janvier 2011

*Durée : 3 heures.*

**SECTION C (T. Joly)**
**Groupes CHIM 3C, CHIM 4C, INFO 2C, INFO 4C, PHY 4C, PHY 5C**
**Amphis 2A, 6C et 9E**

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.*

**Exercice 1.**
Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que : $z^3 = 8i$ sous forme polaire, puis sous forme algébrique.

**Exercice 2.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0\}$.

1. Quelles sont les propriétés qu'une partie $P$ de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ? Vérifier que $F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle satisfait ces propriétés.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $F$ ; en déduire la dimension de $F$.

Soit $G$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 6, 1), \quad v_2 = (1, 3, -5) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, 7, -8).$$

3. Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de $G$ vérifie : $\dim G \geqslant 2$.
4. Démontrer que la famille $(v_1, v_2, v_3)$ n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de $G$, en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de $G$. Préciser la dimension de $G$.
5. Montrer que $G$ est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de $G$ sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)
6. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$ ; en déduire la dimension de $F \cap G$.
7. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 3.**

a) Donner la définition exacte (invoquant un $\varepsilon > 0$) de la formule : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left( \sqrt{1 + x + x^2} - 1 \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2}{x^2 \ln x}$ ·

c) Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x\neq 0. \end{array}\right.$$

**Exercice 4.**

1. Rappeler les énoncés du Théorème des Valeurs Intermédiaires et du Théorème du Maximum.
2. Existe-t-il une application $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,+\infty[)=[-1,0]\cup[1,+\infty[$ ?
3. Existe-t-il une application $f:[0,1]\to[0,+\infty[$ continue et surjective ?

**Exercice 5.**

On considère la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $F(x)=e^x+e^{-x}+2$.

1. Préciser en justifiant la réponse si $F$ est paire ou impaire.
2. Étudier la variations de $F$. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{F(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ et dessiner l'allure du graphe de $F$.

On note $f$ la restriction de $F$ à $[0,+\infty[$.

3. Montrer que l'application $f$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[4,+\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1}:[4,+\infty[\to[0,+\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application $f^{-1}$ est dérivable sur $]4,+\infty[$. Est-elle dérivable en $4$ ?
5. Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ : $f'(x)=\sqrt{f(x)\big(f(x)-4\big)}$.
6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de $f^{-1}$ vérifie pour tout $y>4$ :

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}\,.$$

**Exercice 6.**

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

1. Montrer que pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n$ est définie et appartient à $I$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)$ converge alors sa limite appartient à $I$ et est solution de l'équation $x^2-3x+1=0$.
3. Déterminer l'unique solution dans l'intervalle $I$ de l'équation $x^2-3x+1=0$.
   **On note $\alpha$ ce nombre**.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que
$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|x-y|$$
5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
6. Etablir que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $|u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\alpha$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à $10^{-3}$ ?