

Examen du 7 janvier 2011

Durée : 3 heures.

SECTION A Amphis 1, 4 et 5

*Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices
et les téléphones portables.*

Exercice 1.

Déterminer les nombres complexes z tels que : $z^3 = 8i$ sous forme polaire, puis sous forme algébrique.

Exercice 2.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y - 4z = 0\}$.

1. Quelles sont les propriétés qu'une partie P de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Puis vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle satisfait ces propriétés.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F .

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 6, 1), \quad v_2 = (1, 3, -5) \text{ et } v_3 = (2, 7, -8).$$

3. Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de G vérifie : $2 \leq \dim G \leq 3$.
4. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de G , en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de G . Préciser la dimension de G .
5. Montrer que G est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)
6. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$; en déduire la dimension de $F \cap G$.
7. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

- a) Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
- b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1 \right).$$

- c) Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x \neq 0. \end{cases}$$

Puis calculer sa dérivée f' et étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Rappeler les énoncés du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème du maximum.
2. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?
3. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ continue et surjective?

Exercice 5.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x} + 2$.

1. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
2. Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F , étudier ses variations. Puis, déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

On note f la restriction de F à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $]4, +\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)(f(x) - 4)}$.
6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}$$

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On note $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I .
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors sa limite appartient à I et est solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
3. Déterminer l'unique solution dans l'intervalle I de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.

On note α ce nombre.

4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
6. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de α par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?