Université Paris 7 MT1 MM1
L1, Sciences exactes 2009-2010

SECTION C

Cours par B. Gentou, TD par J. Litwin, S. Goutte, O. Gabriel et B. Gentou

Examen du 14 juin 2010

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
On considère les polynomes

$$P(x) = x^6 - i\,x^5 + (1+3i)x^4 + x^2 - i\,x + 1 + 3i \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^4 + 1$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer les racines de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$.
4. Factoriser le polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (1, m, 1)\ , \quad v = (m, -m, -m-2)\ , \quad w = (m+2, m, -m) \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On note F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w.

1. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?
2. Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?
3. Soit G le sous espace vectoriel engendré par u et v. Déterminer, selon les valeurs de m, une base et la dimension de G.
4. Donner, selon les valeurs de m, une base et la dimension de F.
5. On considère le système d'équations $\mathcal{S}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 1 \\ m\,x & - & m\,y & + & m\,z & = & 2 \\ x & - & (m+2)\,y & - & m\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

   Pour quelles valeurs de m, le système $\mathcal{S}$ admet-il au moins une solution ? Y-a-t-il alors unicité de la solution ?

Exercice 3.
Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2+x-2}\big)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2x-3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4.
Justifier les réponses aux questions suivantes :

1. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$?
2. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective ?
3. Existe-t-il une application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0,1[) = [0,1]$?

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variation de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?
4. Déterminer $g'(1)$.

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \,. \end{cases}$$

On note $I = [2,3]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que
$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \sqrt{7}|$.
Indication : vérifier préalablement que $\sqrt{7} \in I$ et $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$.
4. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{7}$.
6. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{7}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?