Université Paris 7 MT1 MM1
L1, Sciences exactes 2009-2010

SECTION C

Correction de l'examen du 14 juin 2010

Exercice 1.
On considère les polynomes

$$P(x) = x^6 - \mathrm{i}\,x^5 + (1+3\mathrm{i})x^4 + x^2 - i\,x + 1 + 3\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^4 + 1$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer les racines de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$.
4. Factoriser le polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction :

1. *Le calcul de la division division euclidienne du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ s'écrit :*

$$\begin{array}{cllllll|l}
 & x^6 & -\mathrm{i}\,x^5 & +(1+3\mathrm{i})x^4 & +x^2 & -\mathrm{i}\,x & +1+3\mathrm{i} & x^4+1 \\ \cline{8-8}
\ominus & x^6 & & & +x^2 & & & x^2-\mathrm{i}\,x+1+3\mathrm{i} \\ \cline{2-6}
 & & -\mathrm{i}\,x^5 & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & -\mathrm{i}\,x & +1+3\mathrm{i} & \\
\ominus & & -\mathrm{i}\,x^5 & & & -\mathrm{i}\,x & & \\ \cline{3-7}
 & & & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & & +1+3\mathrm{i} & \\
\ominus & & & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & & +1+3\mathrm{i} & \\ \cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

   On a donc une première factorisation $P(x) = (x^4+1)(x^2 - \mathrm{i}\,x + 1 + 3\mathrm{i})$.

2. *Les racines complexes du polynôme $Q(x) = x^4 + 1$ sont les racines quatrièmes de $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$, c'est-à-dire $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\pi)} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$.*
3. *On calcule d'abord les racines du polynômes $T(x) = x^2 - \mathrm{i}\,x + 1 + 3\mathrm{i}$.*
   Le discriminant de T est $\Delta = -1 - 4 - 12\mathrm{i} = -5 - 12\mathrm{i}$.
   Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. On a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = -5-12\mathrm{i} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=-12 \\ x^2+y^2=\sqrt{169}=13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=4 \\ y^2=9 \\ xy=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+iy = 2-3\mathrm{i} \text{ ou } x+iy=-2+3\mathrm{i}$$

   Les racines de T sont donc $t_1 = \frac{\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$ et $t_2 = \frac{\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$.
   On en déduit que les racines de P sont z_0, z_1, z_2, z_3, t_1 et t_2.
4. *D'après les questions précédentes, la factorisation de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :*

$$P(x) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x - 1 + \mathrm{i})(x + 1 - 2\mathrm{i})$$

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (1, m, 1)\ , \quad v = (m, -m, -m-2)\ , \quad w = (m+2, m, -m) \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On note F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w.

1. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?
2. Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?
3. Soit G le sous espace vectoriel engendré par u et v. Déterminer, selon les valeurs de m, une base et la dimension de G.
4. Donner, selon les valeurs de m, une base et la dimension de F.
5. On considère le système d'équations $\mathcal{S}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 1 \\ m\,x & - & m\,y & + & m\,z & = & 2 \\ x & - & (m+2)\,y & - & m\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de m, le système $\mathcal{S}$ admet-il au moins une solution ? Y-a-t-il alors unicité de la solution ?

Correction :

1. *Soient x, y et z des réels quelconques vérifiant $xu + yv + zw = 0$.*
On échelonne ce système d'inconnues x, y et z par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 0 \\ m\,x & - & m\,y & + & m\,z & = & 0 \\ x & - & (m+2)\,y & - & m\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 0 & L_1 \\ & - & m(m+1)\,y & - & m(m+1)\,z & = & 0 & L_2 - mL_1 \\ & - & 2(m+1)\,y & - & 2(m+1)\,z & = & 0 & L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & (m+2)\,z & + & m\,y & = & 0 & L_1 \\ & & (m+1)\,y & + & (m+1)\,z & = & 0 & -L_3/2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_2 - \frac{m}{2}L_3 \end{array}\right.$$

Pour toute valeur de m, ce système homogène échelonné a au moins pour inconnue secondaire z donc la famille (u, v, w) est liée.
On pouvait aussi constaté immédiatement que pour tout m, $w = 2u + v$, ce qui implique que la famille (u, v, w) est liée.

2. $F \subset \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \dim F \leqslant 3$.
Comme F est engendré par la famille de 3 vecteurs (u, v, w), $\dim F = 3 \;\Rightarrow\; (u, v, w)$ est libre.
Donc par contraposée, $\dim F \leqslant 2$ car (u, v, w) est liée.

3. *G est engendré par 2 vecteurs, il est donc de dimension 0, 1 ou 2.*
Il n'est jamais de dimension 0 car pour tout $m \in \mathbb{R}$, u est non nul.
On en déduit que G est une droite si u et v sont colinéaire, un plan sinon.
Etudions pour quelles valeurs de m, u et v sont colinéaires.
Si u et v sont colinéaires alors leurs coordonnées (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique sont proportionnelles, or $u_1 = u_3 = 1$ donc (u_1, u_2, u_3) proportionnel à (v_1, v_2, v_3) implique $v_1 = v_3$ cad $m = -m - 2$ qui équivaut à $m = -1$.
Inversement, si $m = -1$, alors $u = (1, -1, 1) = -v$
On en conclut que :
- si $m = -1$, G est une droite. Son vecteur directeur est alors $u = (1, -1, 1)$.
- si $m \neq -1$, G est un plan et admet pour base les vecteurs (u, v) ou mieux (u, v') avec $v' = \frac{u+v}{m+1} = (1, 0, -1)$.

4. *En reprenant les résultats des deux questions précédentes, on peut distinguer 2 cas :*
- Si $m \neq -1$, $\dim F \leqslant 2$, $G \subset F$ *et* $\dim G = 2$ *donc* $\dim F = 2$ *et* $F = G$.
F *est le plan de base* (u, v) *ou mieux* (u, v') *avec* $v' = \frac{u+v}{m+1} = (1, 0, -1)$.
- Si $m = -1$, $w = (1, -1, 1) = u$ *donc* $F = G$ *et* F *est la droite de vecteur directeur* $u = (1, -1, 1)$.
5. *On peut résoudre le système mais il est plus rapide d'utiliser les questions précédentes.*
On note b *le vecteur* $(1, 2, 1)$.
Le système $\mathcal{S}$ *s'écrit* $xu + yv + zw = b$.
$\mathcal{S}$ *admet des solutions si et seulement si* b *est engendré par* (u, v, w) *c.a.d.* $b \in F$.
- Si $m = -1$, F *est une droite de vecteur directeur* $u = (1, -1, 1)$. *Comme* b *n'est pas colinéaire à* u, $\mathcal{S}$ *n'admet pas de solution.*
- Si $m \neq -1$, F *est le plan de base* (u, v'). *On recherche donc des réels* λ *et* μ *tels que* $(1, 2, 1) = (\lambda + \mu, m\lambda, \lambda - \mu)$ *cad*

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda + \mu = 1 \\ m\lambda = 2 \\ \lambda - \mu = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \mu = 0 \\ \lambda = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

.

Conclusion : le système $\mathcal{S}$ *admet des solutions si et seulement si* $m = 2$

Exercice 3.
Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :
1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\big(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2}\big)$
2. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

Correction :

1. *Pour* x *suffisamment grand, l'expression* $A(x) = x\big(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2}\big)$ *est définie et*

$$\begin{aligned} A(x) &= x\big(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2}\big) \\ &= x\,\frac{(x^2 + x + 2) - (x^2 + x - 2)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{x} \to 0$ *et* $\dfrac{2}{x^2} \to 0$ *en* $+\infty$, *on en conclut* $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A(x) = 2$.
2. *Les polynômes* $N(x) = x^3 - 3x - 2$ *et* $D(x) = x^2 - 2x - 3$ *ont pour racine commune* -1. *Il faut donc d'abord factoriser par* $(x + 1)$.
La division euclidienne de $N(x)$ *par* $x + 1$ *donne* $N(x) = (x + 1)(x^2 - x - 2)$.
Or le polynôme $x^2 - x - 2$ *a pour discriminant* $\Delta = 1 + 8 = 9$ *et pour racines* $\frac{1+3}{2} = 2$ *et* $\frac{1-3}{2} = -1$ *donc* $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. *Pour* N, *on obtient la factorisation* $N(x) = (x - 2)(x + 1)^2$.

Pour D, par une identification immédiate (le produit des racines est égal au coefficient de plus bas degré -3), on obtient la factorisation $D(x) = (x-3)(x+1)$

On en déduit que pour $x \neq -1$, $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-3}$ donc $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{N(x)}{D(x)} = 0$.

3. *Pour $x > 0$, l'expression $B(x) = (x+2^x)^{\frac{1}{x}}$ est bien définie et $B(x) = \exp\big(\dfrac{1}{x}\ln(x+2^x)\big)$.*

   De plus $\dfrac{1}{x}\ln(x+2^x) = \dfrac{1}{x}\big(\ln(2^x) + \ln(1+\dfrac{x}{2^x})\big) = \ln 2 + \dfrac{1}{x}\ln(1+\dfrac{x}{2^x})$.

   En $+\infty$, d'après le théorème de comparaison des fonctions puissances et exponentielles, $\dfrac{x}{2^x} \to 0$ donc $\ln(1+\frac{x}{2^x}) \to 0$.

   Il suit que $\frac{1}{x}\ln(x+2^x) \to \ln 2$ et finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = 2$.

Exercice 4.

Justifier les réponses aux questions suivantes :

1. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$?
2. Existe-t-il une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective ?
3. Existe-t-il une application $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0,1[) = [0,1]$?

Correction :

1. *Non, il n'existe pas une telle application car $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas un intervalle, alors qu'un théorème du cours affirme que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*
2. *Non, il n'existe pas une telle application car f surjective signifie que $f([0,1]) = \mathbb{R}$ qui est non borné, alors qu'un théorème du cours affirme que l'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné.*
3. *Non, il n'existe pas une telle application car $]0,1[$ et $[0,1]$ ne sont pas deux intervalles de même nature (l'un est ouvert, l'autre est fermé) alors qu'un théorème du cours affirme que l'image d'un intervalle par une application continue strictement croissante est un intervalle de même nature.*

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + e^x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variation de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?
4. Déterminer $g'(1)$.

Correction :

1. *f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent injective.*

   Comme f est continue et croissante, $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ cad f est surjective.

   On en conclut que f est bijective.

2. *Le sens de variation de g est le même que celui de f donc g est croissante. De plus, le tableau de variation de f nous indique que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.*
3. *f est continue donc g est continue.*
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable en tout point où f' ne s'annule pas.
   Or $f'(x) = 1 + e^x > 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. *On sait que $g'(1) = \dfrac{1}{f'\big(g(1)\big)}$.*
   Il faut calculer $g(1)$ que l'on note a. Par définition de la réciproque, a est l'unique réel vérifiant $f(a) = 1$ cad $a + e^a = 1$. Or il est évident que $0 + e^0 = 1$ donc $a = 0$.
   On en conclut que $g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{cases}$$

On note $I = [2, 3]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \sqrt{7}|$.
   Indication : vérifier préalablement que $\sqrt{7} \in I$ et $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$.
4. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{7}$.
6. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{7}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?

Correction :

1. *f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$. Pour tout $x \in I$, $1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{3}{2}$ donc $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.*
   On en déduit que f est décroissante sur I.
   Comme f est décroissante et continue sur l'intervalle fermé borné I, $f(I) = [f(3), f(2)] = [\frac{5}{2}, \frac{11}{4}] \subset I$ car $2 \leqslant \frac{5}{2} \leqslant \frac{11}{4} \leqslant 3$.
   On en déduit, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   En effet, $u_0 = 2 \in I$ d'une part, d'autre part, considérons $n \leqslant 0$ un entier quelconque et supposons que $u_n \in I$ alors on a aussi $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ d'après ce qui précède.
2. *On a montré dans la question 1. que pour tout $x \in I$, $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$, donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.*
   f est dérivable et continue sur I donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout x et y dans I, $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$
3. *On a $4 \leqslant 7 \leqslant 9$, comme la fonction racine carrée est croissante, il suit que $\sqrt{7} \in I$.*
   De plus $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ donc $\sqrt{7}$ est un point fixe de f sur I.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant le résultat de la question 2. avec $x = u_n \in I$ et $y = \sqrt{7} \in I$, on obtient $|u_{n+1} - \sqrt{7}| = |f(u_n) - f(\sqrt{7})| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \sqrt{7}|$.

4. *On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on la propriété $P(n)$: $|u_n - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2^n}$.*
   $P(0)$ est vrai car $|u_0 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 2 \leqslant 1$ car on a déjà vu que $2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3$.
   Soit $n \leqslant 0$ un entier quelconque et supposons $P(n)$ vraie.
   D'après la question 3., $|u_{n+1} - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{7}|$, donc $P(n)$ implique $|u_{n+1} - \sqrt{7}| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$ cad $P(n+1)$.
5. *$\lim \frac{1}{2^n} = 0$ donc, d'après la question 4. et le théorème des gendarmes $\lim u_n - \sqrt{7} = 0$ cad $\lim u_n = \sqrt{7}$.*
6. *f est un polynôme à coefficients rationnels donc si x est un rationnel, $f(x)$ est un rationnel. Comme $u_0 = 2$ est un rationnel, on déduit par récurrence que (u_n) est une suite de rationnels qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{7}$.*
   Pour tout n, u_n est donc une approximation de $\sqrt{7}$ avec une erreur qui d'après la question 4. est majorée par $\frac{1}{2^n}$.
   Pour obtenir une approximation rationnelle de $\sqrt{7}$ avec une erreur inférieure à 10^{-3}, il suffit donc de choisir n tel que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$ cad $2^n \geqslant 1000$ ce qui équivaut à $n \geqslant 10$ car $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$.
   Conclusion : u_{10} est une approximation rationnelle de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près.