SECTION B

Examen du 14 juin 2010

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. Question de cours

A définir.

Exercice 2.

On considère les polynômes

$$P(x) = x^6 - ix^5 + (1 + 3i)x^4 + x^2 - ix + 1 + 3i \quad \text{et} \quad Q(x) = x^4 + 1$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q .
2. Déterminer les racines de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$.
4. Factoriser $P(x)$ en polynômes du premier degré.

Exercice 3.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (1, m, 1), \quad v = (m, -m, -m - 2), \quad w = (m + 2, m, -m) \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On note F le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w .

1. Pour quelles valeurs de m la famille (u, v, w) est-elle liée ?
2. Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?
3. Soit G le sous espace engendré par u et v . Déterminer selon les valeurs de m une base et la dimension de G .
4. Donner selon les valeurs de m une base et la dimension de F .
5. On considère le système $\mathcal{S}$ suivant :

$$\begin{cases} x + my + (m+2)z = 1 \\ mx - my + mz = 2 \\ x - (m+2)y - mz = 1 \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m , le système $\mathcal{S}$ admet-il au moins une solution ? Y-a-t-il alors unicité de la solution ?

Exercice 4.

Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + x - 2})$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 5.

Justifier les réponses aux questions suivantes :

1. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, 1]) = [0, 1] \cup [2, 3]$?
2. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective ?
3. Existe-t-il une application $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et telle que $f(]0, 1[) = [0, 1]$?

Exercice 6.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + e^x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. On note g la bijection réciproque de f . Donner le tableau de variation de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?
4. Déterminer $g'(1)$.

Exercice 7.

On note $I = [2, 3]$.

On considère la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 7)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in I, f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
2. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{7}|$.
Indication : vérifier préalablement que $\sqrt{7} \in I$ et $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$.
4. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N} : |u_n - \sqrt{7}| \leq \frac{1}{2^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{7}$. Que faut-il faire pour obtenir une approximation de $\sqrt{7}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?