Corrigé des exercices d'analyse de l'examen du 14 juin 2010

Exercice 4

• Lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x^2+x+2}$ et $\sqrt{x^2+x-2}$ tendent vers $+\infty$. La sous-expression $\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}$ est donc un cas d'indétermination du type $\infty-\infty$, que l'on peut lever en faisant intervenir la grandeur conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\frac{(x^2+x+2)-(x^2+x-2)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{4}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x-2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Il en résulte que l'expression entière $x\big(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}\big)$ est un cas d'indétermination du type $\infty\,.\,0$, qu'on peut là encore lever à l'aide de la grandeur conguguée :

$$x\big(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x-2}\big)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+x-2}}=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}2.$$

• Lorsque x tend vers -1, x^3-3x-2 et x^2-2x-3 tendent vers 0, et nous sommes devant un cas d'indétermination du type 0/0. Mais puisque x^3-3x-2 et x^2-2x-3 sont des polynômes, nous pouvons facilement lever cette indétermination en les écrivant chacun sous la forme : $(x+1)^mQ(x)$, où m est la multiplicité de leur racine -1. À l'aide de divisions euclidiennes successives, on trouve : $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$ et $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. On en déduit :

$$\frac{x^3-3x-2}{x^2-2x-3}=\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-3)}=\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}\xrightarrow[x\to-1]{}\frac{0\,(-3)}{-4}=0.$$

• Lorsque x tend vers $+\infty$, $(1+x)$ tend aussi vers $+\infty$, tandis que $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Nous sommes donc en présence d'une indétermination du type ∞^0, qu'il s'agit de lever en considérant le logarithme de l'expression :

$$\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

ce qui nous ramène à une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, qui ne relève bien sûr pas de la limite de référence : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, mais de la limite de référence : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^\alpha}=0$ pour $\alpha>0$. En faisant le changement de variable $t=1+x$ (et donc $x=t-1$), on aboutit à :

$$\frac{\ln t}{t-1}=\frac{\ln t}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0\,.\,1=0.$$

Par composition de cette limite avec $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=0$, et par composition de limites encore :

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=e^0=1.$$

N.B. La rédaction ci-dessus tend à rendre compte du nécessaire cheminement de réflexion. Elle s'écarte considérablement de celle attendue à l'examen, bien plus courte et obtenue en n'en reprenant que les seuls éléments démonstratifs.

Exercice 5

1. C'est impossible, car selon un corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, *l'image* $f(I)$ *d'un intervalle* I *par une application continue* f *est elle-même un intervalle*; or $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas un intervalle.

(On peut aussi démontrer cette impossibilité directement à partir du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) : L'hypothèse $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$ implique qu'il existe $a, b \in [0,1]$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = 2$. La fonction f étant alors nécessairement continue entre a et b (bornes incluses), le TVI entraîne pour tout $c \in]1,2[$ l'existence d'un réel $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = c$, d'où $c \in f([0,1])$, ce qui contredit le fait que $f([0,1]) = [0,1] \cup [2,3]$.)

2. C'est impossible en vertu du Théorème du Maximum (TM), qui assure que *l'image* $f([a,b])$ *d'un segment* $[a,b]$ *par une fonction* f *continue sur* $[a,b]$ *est un segment* (segment = intervalle fermé borné) : Il faudrait que $f([0,1])$ soit de la forme $[c,d]$, alors que $f([0,1]) = \mathbb{R}$, selon l'hypothèse de surjectivité de f.

3. C'est impossible en vertu du Théorème des Bijections Bicontinues (TBB) : Puisque f est supposée *continue et strictement croissante sur* $]0,1[$, le TBB implique entre autres choses que $f(]0,1[)$ est un intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$.

N.B. Les trois questions de cet exercice sont en fait des questions de cours déguisées *sur les théorèmes fondamentaux des fonctions continues : TVI, TM, TBB.*

Exercice 6

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc *continue sur* $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 1 + e^x > 0$, donc f est *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. En vertu du Théorème des Bijections Bicontinues, ces propriétés de continuité et de stricte monotonie de f permettent de conclure que :

- f est une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sur $f\big(]-\infty, +\infty[\big)$,
- $f\big(]-\infty, +\infty[\big)$ est l'intervalle : $\Big]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$,
- la bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de même sens de variation que f, à savoir strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. En vertu de ce que l'on vient d'écrire, la réciproque $g = f^{-1}$ a pour variations et limites en $\pm\infty$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Toujours en vertu de ce que l'on a mentionné pour la question 1, la fonction $g = f^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Mais comme de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ (car $f'(x) = 1 + e^x > 0$), nous pouvons conclure que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a : $1 = (f(g(y)))' = f'(g(y)).g'(y)$ et donc $g'(y) = 1/f'(g(y))$. En remplaçant y par $1 = f(0)$ dans cette dernière relation, on obtient : $g'(1) = 1/f'(g(1)) = 1/f'(0) = 1/2$.

Exercice 7

1. Pour tout $x \in I = [2,3]$, on a : $f'(x) = 1 - x/2 \leqslant 0$, donc la fonction f est décroissante sur I. Ainsi, pour tout $x \in I$: $2 \leqslant x \leqslant 3$, $f(2) \geqslant f(x) \geqslant f(3)$, c'est-à-dire $11/4 \geqslant f(x) \geqslant 5/2$, d'où : $f(x) \in [2,3]$.

Montrons que tous les termes u_n appartiennent à I par récurrence sur n.

Initialisation. $u_0 = 2 \in I$.

Hérédité. Supposons que $u_n \in I$. En vertu de ce que l'on vient d'établir, il s'ensuit : $u_{n+1} = f(u_n) \in I$.

Ainsi, on a bien $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La fonction f est dérivable sur I, et par conséquent continue sur ce même intervalle I. Ainsi, pour tous $x, y \in I$, f est dérivable et continue entre x et y (bornes incluses), donc en vertu du Théorème des Accroissements Finis (TAF), il existe un réel c entre x et y tel que : $f(x) - f(y) = f'(c) \,.\, (x - y)$. De plus, ce réel c, entre $x \in I$ et $y \in I$, appartient naturellement à l'intervalle I, d'où :

$$|f'(c)| = \left|1 - \frac{c}{2}\right| = \frac{c}{2} - 1 \leqslant \frac{1}{2} \cdot$$

Il s'ensuit :

$$|f(x) - f(y)| \;=\; |f'(c)| \,.\, |x - y| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|x - y|.$$

3. On a : $4 \leqslant 7 \leqslant 9$, donc $2 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 3$, soit encore $\sqrt{7} \in I$. De plus, $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7} - \frac{1}{4}(\sqrt{7}^{\,2} - 7) = \sqrt{7}$. Selon l'inégalité établie à la question précédente, il en résulte :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{7}\right| \;=\; \left|f(u_n) - f(\sqrt{7})\right| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{7}\right|.$$

4. Montrons que l'on a : $\left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \dfrac{1}{2^n}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $\left|u_0 - \sqrt{7}\right| \;=\; \sqrt{7} - 2 \;\leqslant\; 1 \;=\; \dfrac{1}{2^0}$.

Hérédité. Supposons que $\left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \dfrac{1}{2^n}$. En vertu de l'inégalité de la question 3, on en déduit :

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \;=\; \frac{1}{2^{n+1}} \cdot$$

Cela établit l'inégalité : $\left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. On a : $\left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \;=\; 0$, donc par un théorème de gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \;=\; \sqrt{7}.$$

Tous les termes u_n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont rationnels par récurrence, car $u_0 = 2 \in \mathbb{Q}$ *(Initialisation)* et $u_n \in \mathbb{Q} \implies u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}(u_n^2 - 7) \in \mathbb{Q}$ *(Hérédité)*.

Pour approcher $\sqrt{7}$ par un rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3}, on peut donc choisir un terme u_n tel que $\dfrac{1}{2^n} \;\leqslant\; 10^{-3}$ $\left(\text{puisque } \left|u_n - \sqrt{7}\right| \;\leqslant\; \dfrac{1}{2^n}\right)$, autrement dit tel que $2^n \;\geqslant\; 10^3$. En vertu de l'inégalité : $2^{10} = 1024 \geqslant 10^3$ (que tout informaticien pratique 1000 fois par jour), le terme rationnel u_{10} est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près.