Université Paris 7 — MT1 MM1

L1, Sciences exactes — 2009-2010

SECTION C

Correction de l'examen du 14 juin 2010

Exercice 1.
On considère les polynomes

$$P(x) = x^6 - \mathrm{i}\,x^5 + (1+3\mathrm{i})x^4 + x^2 - i\,x + 1 + 3\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^4 + 1$$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer les racines de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire les racines de $P(x)$ dans $\mathbb{C}$.
4. Factoriser le polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction :

1. *Le calcul de la division division euclidienne du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ s'écrit :*

$$\begin{array}{rllllll|l}
 & x^6 & -\mathrm{i}\,x^5 & +(1+3\mathrm{i})x^4 & +x^2 & -\mathrm{i}\,x & +1+3\mathrm{i} & x^4+1 \\ \cline{8-8}
\ominus & x^6 & & & +x^2 & & & x^2-\mathrm{i}\,x+1+3\mathrm{i} \\ \cline{2-6}
 & & -\mathrm{i}\,x^5 & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & -\mathrm{i}\,x & +1+3\mathrm{i} & \\
 & \ominus & -\mathrm{i}\,x^5 & & & -\mathrm{i}\,x & & \\ \cline{3-7}
 & & & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & & +1+3\mathrm{i} & \\
 & \ominus & & +(1+3\mathrm{i})x^4 & & & +1+3\mathrm{i} & \\ \cline{3-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On a donc une première factorisation $P(x) = (x^4+1)(x^2 - \mathrm{i}\,x + 1 + 3\mathrm{i})$.

2. *Les racines complexes du polynôme $Q(x) = x^4 + 1$ sont les racines quatrièmes de $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$, c'est-à-dire $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\pi)} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$.*
3. *On calcule d'abord les racines du polynômes $T(x) = x^2 - \mathrm{i}\,x + 1 + 3\mathrm{i}$.*
Le discriminant de T est $\Delta = -1 - 4 - 12\mathrm{i} = -5 - 12\mathrm{i}$.
Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels. On a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = -5-12\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{169} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy = 2-3\mathrm{i} \text{ ou } x+iy = -2+3\mathrm{i}$$

Les racines de T sont donc $t_1 = \frac{\mathrm{i}+2-3\mathrm{i}}{2} = 1 - \mathrm{i}$ et $t_2 = \frac{\mathrm{i}-2+3\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$.
On en déduit que les racines de P sont z_0, z_1, z_2, z_3, t_1 et t_2.
4. *D'après les questions précédentes, la factorisation de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est :*

$$P(x) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})(x - 1 + \mathrm{i})(x + 1 - 2\mathrm{i})$$

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (1, m, 1)\ , \quad v = (m, -m, -m-2)\ , \quad w = (m+2, m, -m) \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

On note F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u, v et w.

1. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?
2. Que peut-on en déduire pour la dimension de F ?
3. Soit G le sous espace vectoriel engendré par u et v. Déterminer, selon les valeurs de m, une base et la dimension de G.
4. Donner, selon les valeurs de m, une base et la dimension de F.
5. On considère le système d'équations $\mathcal{S}$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 1 \\ m\,x & - & m\,y & + & m\,z & = & 2 \\ x & - & (m+2)\,y & - & m\,z & = & 1 \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de m, le système $\mathcal{S}$ admet-il au moins une solution ? Y-a-t-il alors unicité de la solution ?

Correction :

1. *Soient x, y et z des réels quelconques vérifiant $xu + yv + zw = 0$.*
On échelonne ce système d'inconnues x, y et z par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 0 \\ m\,x & - & m\,y & + & m\,z & = & 0 \\ x & - & (m+2)\,y & - & m\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & m\,y & + & (m+2)\,z & = & 0 & L_1 \\ & - & m(m+1)\,y & - & m(m+1)\,z & = & 0 & L_2 - mL_1 \\ & - & 2(m+1)\,y & - & 2(m+1)\,z & = & 0 & L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & (m+2)\,z & + & m\,y & = & 0 & L_1 \\ & & (m+1)\,y & + & (m+1)\,z & = & 0 & -L_3/2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_2 - \frac{m}{2}L_3 \end{array}\right.$$

Pour toute valeur de m, ce système homogène échelonné a au moins pour inconnue secondaire z donc la famille (u, v, w) est liée.
On pouvait aussi constaté immédiatement que pour tout m, $w = 2u + v$, ce qui implique que la famille (u, v, w) est liée.
2. $F \subset \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \dim F \leqslant 3$.
Comme F est engendré par la famille de 3 vecteurs (u, v, w), $\dim F = 3 \;\Rightarrow\; (u, v, w)$ est libre.
Donc par contraposée, $\dim F \leqslant 2$ car (u, v, w) est liée.
3. *G est engendré par 2 vecteurs, il est donc de dimension 0, 1 ou 2.*
Il n'est jamais de dimension 0 car pour tout $m \in \mathbb{R}$, u est non nul.
On en déduit que G est une droite si u et v sont colinéaire, un plan sinon.
Etudions pour quelles valeurs de m, u et v sont colinéaires.
Si u et v sont colinéaires alors leurs coordonnées (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique sont proportionnelles, or $u_1 = u_3 = 1$ donc (u_1, u_2, u_3) proportionnel à (v_1, v_2, v_3) implique $v_1 = v_3$ cad $m = -m - 2$ qui équivaut à $m = -1$.
Inversement, si $m = -1$, alors $u = (1, -1, 1) = -v$
On en conclut que :
- si $m = -1$, G est une droite. Son vecteur directeur est alors $u = (1, -1, 1)$.
- si $m \neq -1$, G est un plan et admet pour base les vecteurs (u, v) ou mieux (u, v') avec $v' = \frac{u+v}{m+1} = (1, 0, -1)$.

4. *En reprenant les résultats des deux questions précédentes, on peut distinguer 2 cas :*
   - *Si* $m \neq -1$, $\dim F \leqslant 2$, $G \subset F$ *et* $\dim G = 2$ *donc* $\dim F = 2$ *et* $F = G$.
   F *est le plan de base* (u, v) *ou mieux* (u, v') *avec* $v' = \frac{u+v}{m+1} = (1, 0, -1)$.
   - *Si* $m = -1$, $w = (1, -1, 1) = u$ *donc* $F = G$ *et* F *est la droite de vecteur directeur* $u = (1, -1, 1)$.
5. *On peut résoudre le système mais il est plus rapide d'utiliser les questions précédentes.*
   On note b *le vecteur* $(1, 2, 1)$.
   Le système $\mathcal{S}$ *s'écrit* $xu + yv + zw = b$.
   $\mathcal{S}$ *admet des solutions si et seulement si* b *est engendré par* (u, v, w) *c.a.d.* $b \in F$.
   - *Si* $m = -1$, F *est une droite de vecteur directeur* $u = (1, -1, 1)$. *Comme* b *n'est pas colinéaire à* u, $\mathcal{S}$ *n'admet pas de solution.*
   - *Si* $m \neq -1$, F *est le plan de base* (u, v'). *On recherche donc des réels* λ *et* μ *tels que* $(1, 2, 1) = (\lambda + \mu, m\lambda, \lambda - \mu)$ *cad*
   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ m\lambda = 2 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$
   .
   Conclusion : le système $\mathcal{S}$ *admet des solutions si et seulement si* $m = 2$