PARIS 7 MT1
2009-2010 Section E

CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL DU 12 DÉCEMBRE 2009
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Les exercices sont indépendants.

Questions de cours.
a) Énoncé du théorème de Rolle.
b) Énoncé du théorème des accroissements finis.
c) Démonstration du théorème des accroissements finis (en supposant connu le théorème de Rolle).
d) Définition : fonction contractante.

a) *Théorème de Rolle.* Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable dans $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) *Théorème des accroissements finis.* Soit f une fonction définie et continue dans un intervalle contenant les points a et b, dérivable dans $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(formule des accroissements finis).

c) *Démonstration du théorème des accroissements finis.* Soit $\mathrm{L}(x)$ la fonction affine (polynôme du premier degré) qui prend les mêmes valeurs que f aux points a et b. On a

$$\mathrm{L}(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

et $\mathrm{L}'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour tout x. Posons $g(x) = f(x) - \mathrm{L}(x)$. On a $g(a) = g(b) = 0$, et la fonction$g$ vérifie les autres conditions d'application du théorème de Rolle. Il existe donc un point c de $]a,b[$ tel que $g'(c) = f'(c) - \mathrm{L}'(c) = 0$, d'où le théorème.

d) *Définition. Fonction contractante.* Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ est dite contractante s'il existe un réel $k < 1$ telle que

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |x - x'|$$

quels que soient x et x' dans I.

Exercice 1. On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$, puis $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.
a) Démontrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
b) Prouver que $\alpha + \beta = -1$ et que $\alpha\beta = -1$.
c) En déduire que α et β sont les solutions de l'équation du second degré

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1 = 0. \tag{1}$$

d) Exprimer α en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et en résolvant (1) en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

a) On observe d'abord que ω est une racine cinquième de l'unité. En effet $\omega^5 = e^{2i\pi} = 1$. Suivant une formule classique pour la somme des termes d'une progression géométrique, on a

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0.$$

b) On a immédiatement

$$\alpha+\beta=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1.$$

D'autre part

$$\alpha\beta=(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7.$$

Mais $\omega^6=\omega^5\omega=\omega$ et $\omega^7=\omega^5\omega^2=\omega^2$. on a donc

$$\alpha\beta=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1.$$

c) Les nombres α et β sont les solutions de l'équation du second degré

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0,$$

mais en développant le produit on voit que celle-ci s'écrit aussi

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

ou encore, d'après la question précédente

$$x^2+x-1=0.$$

d) Puisque $\omega^4\omega=\omega^5=1$, on a

$$\omega^4=\overline{\omega}$$

(l'inverse d'un nombre complexe de module 1 est sont conjugué), d'où

$$\alpha=\omega+\overline{\omega}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos\frac{2\pi}{5}\,.$$

Par suite, $2\cos\frac{2\pi}{5}$ est égal à l'une des deux racines de l'équation $x^2+x-1=0$, qui sont

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{et}\quad\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Mais comme $0\leqslant\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, le nombre $2\cos\frac{2\pi}{5}$ est >0 et il est donc égal à celle des racines de l'équation qui es positive. On a finalement

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 2. Soit E un ensemble et f une bijection de E sur E. On pose

$$\mathrm{A}=\{x\in\mathrm{E}\mid f(x)=x\}.$$

(les éléments de A sont donc les points fixes de f) et

$$\mathrm{B}=\mathrm{E}-\mathrm{A}$$

(B est le complémentaire de A dans E).

Montrer soigneusement que $f(\mathrm{B})=\mathrm{B}$.

L'ensemble B est l'ensemble des éléments x de A tels que $f(x)\neq x$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas des points fixes de f.

Montrons que $\mathrm{B}\subset f(\mathrm{B})$. Soit $x\in\mathrm{B}$. On a $f(x)\in\mathrm{B}$, car dans le cas contraire $f(x)$ serait un point fixe de A et on aurait $f(f(x))=f(x)$, d'où $f(x)=x$ puisque x est injective, et par suite, $x\in\mathrm{A}$ contrairement à l'hypothèse.

Montrons que $f(\mathrm{B})\subset\mathrm{B}$. Soit $y\in f(\mathrm{B})$. Soit $z\in\mathrm{B}$ tel que $y=f(z)$. Pour montrer que $y\in\mathrm{B}$, montrons que y n'est pas un point fixe. Si c'était le cas, on aurait $y=f(y)$, donc $f(z)=f(f(z))$, d'où $z=f(z)$; le point z serait un point fixe, contrairement à l'hypothèse.

Exercice 3. On considère la transformation affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par la relation

$$X' = AX + B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xA_1 + yA_2 + zA_3$$

où A_1, A_2, A_3 sont les colonnes de A.

a) Calculer le déterminant de A. La transformation f est-elle bijective ?

b) Vérifier que A_3 est combinaison linéaire de A_1 et A_2.

c) Montrer que l'image de f est un plan (on donnera une représentation paramétrique de ce plan).

d) Donner l'équation de ce plan.

e) Trouver un vecteur V non nul tel que $AV = 0$.

f) Montrer que deux points M et N ont la même image si et seulement si $\overrightarrow{MN} = N - M$ est colinéaire à V.

a) En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(1\times 2 - 2\times 2) - (-2\times 2) = 2\times(-2) + 2\times 2 = 0.$$

Puisque son déterminant est nul, la transformation affine $X \mapsto AX + B$ n'est pas bijective.

b) On a $A_3 = A_1 + A_2$.

c) L'image par f de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est

$$X' = B + xA_1 + yA_2 + zA_3 = B + (x+z)A_1 + (y+z)A_2$$

Elle appartient donc au plan P d'origine B et de vecteurs directeurs A_1 et A_2 (on observe que A_1 et A_2 sont indépendants). Si on préfère, on peut dire : le plan P dont une représentation paramétrique est $M = B + sA_1 + tA_2$ ($s, t \in \mathbb{R}$). Pour montrer que l'image de f est *égale* à P, il faut encore montrer que tout point de P est dans l'image de f. C'est facile : $M = B + sA_1 + tA_2$ est l'image du point $\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Pour obtenir l'équation de P, refaisons un raisonnement souvent fait : le point M appartient à P si et seulement si le vecteur $M - B$ est combinaison linéaire de A_1 et A_2, et puisque A_1 et A_2 sont indépendants, il est nécessaire et suffisant pour cela que

$$\det(M - B, A_1, A_2) = 0.$$

L'équation du plan P est donc

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

soit, en développant,

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$2x - 4y + 2z = 0,$$

ou finalement
$$x-2y+z=0.$$

e) On a vu que $A_1+A_2-A_3=0$. Cette relation s'écrit encore
$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=0.$$

Le vecteur $V=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ convient.

f) Si $\overrightarrow{MN}=\alpha V$, ou $N-M=\alpha V$, on a
$$f(N)=AN+B=A(M+\alpha V)+B=AM+\alpha AV+B=AM+B=f(M)$$
(en utilisant le fait que $AV=0$).

Inversement supposons que $f(M)=f(N)$ et posons $N-M=U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$. On obtient tout de suite $AU=0$, autrement dit
$$\begin{cases}2u+2w=0\\u+v+2w=0\\2v+2w=0\end{cases}$$
d'où on tire $u=-w$, $v=-w$, soit
$$N-M=U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=-w\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=-wV.$$

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est bien colinéaire à V.

Exercice 4. On pose $P(x)=x^4-4x^2+6x+2$.

a) On note D la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe d'équation $y=P(x)$. Donner sous la forme $y=px+q$ l'équation de D.

b) Montrer que 1 est racine double du polynôme $Q(x)=P(x)-px-q$.

c) Trouver le quotient de la division de $Q(x)$ par $(x-1)^2$.

d) En déduire que D coupe la courbe d'équation $y=P(x)$ en deux autres points dont on donnera les coordonnées.

a) La tangente au point d'abscisse a à la courbe d'équation $y=P(x)$ a pour équation
$$y=P(a)+P'(a)(x-a).$$
Pour $P(x)=x^4-4x^2+6x+2$, on a $P'(x)=4x^3-8x+6$, $P(1)=5$, $P'(1)=2$. L'équation de D est donc $y=5+2(x-1)$, soit
$$y=2x+3.$$

b) On a
$$Q(x)=P(x)-2x-3,$$
soit
$$Q(x)=x^4-4x^2+4x-1$$
$$Q'(x)=4x^3-8x+4$$
$$Q''(x)=12x^2-8$$

On a $\mathrm{Q}(1)=\mathrm{Q}'(1)=0$, $\mathrm{Q}''(1)\neq 0$, ce qui montre que $x=1$ est racine double de Q.

c) Divisons $\mathrm{Q}(x)$ par $(x-1)^2$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\quad -4x^2+4x-1 & x^2-2x+1 \\
\cline{2-2}
x^4-2x^3+x^2 \qquad\qquad\quad & x^2+2x-1 \\
\cline{1-1}
2x^3-5x^2+4x-1 & \\
2x^3-4x^2+2x \quad\;\; & \\
\cline{1-1}
-x^2+2x-1 & \\
-x^2+2x-1 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Le reste est nul, comme prévu. On obtient

$$\mathrm{Q}(x)=(x-1)^2(x^2+2x-1).$$

d) Les abscisses des points où D coupe la courbe $y=\mathrm{P}(x)$ sont les racines de l'équation

$$\mathrm{P}(x)=px+q$$

ou

$$\mathrm{Q}(x)=0,$$

soit encore

$$(x-1)^2(x^2+2x-1)$$

en dehors de 1, racine double, ce sont les racines de l'équation $x^2+2x-1=0$, soit

$$x_1=-1+\sqrt{2},\;\; x_2=-1-\sqrt{2}.$$

Les ordonnées des points correspondants sur la courbe $y=\mathrm{P}(x)$, ou sur D, cela revient au même, sont

$$y_1=2x_1+3=1+2\sqrt{2},\quad y_2=2x_2+3=1-2\sqrt{2}.$$

Exercice 5. On pose $f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$.

a) Montrer que pour tout x réel on a $|f'(x)|\leqslant \frac{1}{4}$.

b) En déduire que f est contractante

c) On définit la suite (x_n) par les relations $x_0=0$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ pour $n\geqslant 0$. Calculer à la main x_1, x_2, x_3 (laisser le résultat sous forme de fraction).

d) Montrer que quand n tend vers l'infini, x_n tend vers une solution s de l'équation $x^3+2x-1=0$.

e) Donner un entier N tel que $n\geqslant \mathrm{N}$ entraîne $|x_n-s|\leqslant 10^{-3}$.

f) Combien l'équation $x^3+2x-1=0$ a-t-elle de solutions réelles ?

a) On a

$$f'(x)=\frac{-2x}{(4+x^2)^2}=\frac{-2x}{4+x^2}\times\frac{1}{4+x^2}.$$

On sait que $|2x|\leqslant x^2+1$, à plus forte raison $|2x|\leqslant x^2+4$. On a donc

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{4+x^2}\quad\text{et}\quad |f'(x)|\leqslant\frac{1}{4}.$$

Autre méthode. De l'inégalité $|4x|\leqslant 4+x^2$, on tire

$$\frac{|4x|}{4+x^2}\leqslant 1\quad\text{et}\quad\frac{|2x|}{4+x^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

d'où
$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{8}.$$
C'est même un peu mieux.

Autre méthode. On détermine le maximum et le minimum de $f'(x)$ en étudiant les variations de cette fonction. Comme il s'agit d'une fonction impaire, il suffit de l'étudier sur $[0,+\infty[$. Sa dérivée est

$$f''(x) = \frac{(4+x^2)^2\times(-2)-(-2x)\times(4+x^2)\times 2x}{(4+x^2)^4} = \frac{-2(4+x^2)+4x^2}{(4+x^2)^3} = \frac{2(x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

d'où le tableau de variation :

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	0

On a donc $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{16}$ sur $[0,+\infty[$, et, puisque f est impaire, sur tout $\mathbb{R}$.

C'est encore mieux.

b) D'après l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question précédente, on a
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4},$$
ce qui montre que f est contractante.

c) On a
$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{4}\\
x_2 &= \frac{1}{4+\dfrac{1}{16}} = \frac{16}{64+1} = \frac{16}{65}\\
x_3 &= \frac{1}{4+\dfrac{101^2}{429^2}} = \frac{1}{4+\dfrac{10201}{184041}} = \frac{184041}{736164+10201} = \frac{184041}{746365}.
\end{aligned}$$

[L'énoncé ne le demandait pas, mais on a
$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}25\\
x_2 &= 0{,}24615385\\
x_3 &= 0{,}24626953.]
\end{aligned}$$

d) Puisque f est contractante, d'après le théorème du point fixe, l'équation $f(x)=x$ a une solution unique, que nous noterons s, et toute suite (x_n) vérifiant la relation $x_{n+1}=f(x_n)$ converge vers s.

Puisque
$$f(x)=x \Longleftrightarrow \frac{1}{4+x^2}=x \Longleftrightarrow x^3+4x-1=0,$$
le point fixe s de f est solution de l'équation $x^3+4x-1=0$.

e) On a (cela fait partie de l'énoncé du théorème du point fixe).
$$|x_n-s| \leqslant k^n|x_0-s|$$
On a $0 \leqslant s = 1/(4+s^2) \leqslant 1/4$ et $x_0=1$. Avec $k=1/4$, on obtient
$$|x_n-s| \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}.$$
Puisque $1024 = 2^{10} = 4^5$, on aura $|x_n-s| \leqslant 10^{-3}$ pour $n \geqslant 4$. On peut donc prendre $\mathrm{N}=4$. Il est assuré que x_4 est une valeur approchée de s à 10^{-3} près. [Le calcul donne $x_4 = 0{,}24626608$.]

Complément. En fait, comme on l'a vu, on peu prendre $k = 1/16$. Puisque $|x_2 - s| \leqslant \frac{1}{16^2}|x_0 - s| \leqslant \frac{1}{16^2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{256\times 4} = \frac{1}{1024}$, on a déjà une valeur approchée à 10^{-3} près de s en prenant x_2.

f) On a déjà vu que $x^3 + 4x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{4+x^2} = x$ at que cette dernière équation a une solution unique.

Autre méthode. On étudie les variations de la fonction $x^3 + 4x - 1$. Cette fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$. Elle s'annule donc au moins une fois. D'autre part, sa dérivée est $3x^2 + 4 > 0$, la fonction est donc strictement croissante, et prend au plus une fois la valeur 0. Conclusion : la fonction $x^3 + 4x - 1$ prend exactement une fois la valeur 0, ce qui signifie que l'équation $x^3 + 4x - 1 = 0$ a exactement une racine.

Exercice 6. On pose $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et on définit la suite (x_n) par les relations $x_0 = a$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geqslant 0$.

Étudier la convergence de la suite (x_n). *Indication.* La fonction g n'est pas contractante, comme le candidat pourra le montrer s'il le souhaite, il faut donc procéder autrement que dans l'exercice 5.

Si $a > 0$, on a $x_0 > 0$, et il est clair que x_n est défini et > 0 pour tout n. Puisque

$$1 + x_n^2 > 1,$$

on a

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2} < x_n.$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0. Elle a donc une limite l. Cette limite vérifie nécessairement la relation

$$l = \frac{l}{1+l^2}$$

Comme

$$l = \frac{l}{1+l^2} \Longleftrightarrow l + l^3 = l \Longleftrightarrow l^3 = 0,$$

on a $l = 0$.

Si $a < 0$, on raisonne de la même façon : x_n est défini et < 0 pour tout n. En multipliant la relation

$$\frac{1}{1+x_n^2} < 1$$

par x_n on obtient

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2} > x_n.$$

La suite (x_n) est donc croissante et majorée par 0. Elle a donc une limite l', et on montre comme ci-dessus que $l' = 0$.

Enfin, si $a = 0$, la suite est constante et égale à zéro, elle a encore pour limite zéro.

Complément. La fonction $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ n'est pas contractante, car un calcul facile montre que $g'(0) = 1$. Or si g était contractante de rapport $k < 1$, de la relation

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

on déduirait que $|g'(0)| \leqslant k < 1$.