EXAMEN PARTIEL DU 21 NOVEMBRE 2009
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

7 exercices. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soient a et b des réels positifs. On pose $m = \frac{1}{2}(a+b)$ et on définit h par $h^{-1} = \frac{1}{2}(a^{-1}+b^{-1})$. Montrer que $h \leqslant m$.

Exercice 2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ des points du plan.

a) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ si et seulement si les segments AC et BD ont même milieu.

b) On suppose cette condition satisfaite. Montrer qu'on a $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DA}$ si et seulement si les segments AC et BD sont orthogonaux.

Exercice 3. On considère la droite D de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $\mathrm{A} = (1,1,1)$ et de vecteur directeur $\mathrm{V} = (0,-1,3)$. On considère le point $\mathrm{B} = (2,6,0)$.

a) Donner une représentation paramétrique de D.

b) Montrer que pour tout point M de D, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont linéairement indépendants.

c) Donner l'équation du plan contenant le point B et la droite D.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs (représentés par leur matrice-colonne)

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m \neq \frac{2}{3}$.

On suppose dans les questions suivantes que $m = \frac{2}{3}$.

b) Montrer que pour qu'un vecteur $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ il faut et il suffit que $\det(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{A}) = 0$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour que le système d'équations linéaires

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} 2x+y+z = a \\ x+2y+z = b \\ x+y+\dfrac{2}{3}z = c \end{cases}$$

ait au moins une solution.

d) Lorsque le système (S) a au moins une solution, l'ensemble des solutions est-il un point, une droite, ou un plan de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5. Donner un repère et une équation cartésienne du plan défini par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3-s-2t \\ y = 2+s-t \qquad (s,t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+3s+t. \end{cases}$$

T.S.V.P.

Exercice 6. On rappelle que l'équation générale des plans contenant la droite d'équation

$$\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}$$

est

$$\alpha(x-y-z-1)+\beta(2x+y+z+2)=0$$

où $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

a) Comment démontre-t-on ce résultat ?

Parmi ces plans, y a-t-il :

b) un plan vertical (parallèle à Oz) ?
c) un plan parallèle à xOy ?
d) un plan orthogonal au vecteur $(1,-1,1)$?
e) un plan parallèle au vecteur $(1,-1,1)$?
f) un plan passant par l'origine ?

Exercice 7. Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Soit $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Vérifier que AB = BA. Montrer que B peut se mettre sous la forme $\mathrm{B}=a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$.

b) Montrer que si une matrice M de format 2×2 commute avec A, elle est de la forme $a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$ avec a,b réels.