PARIS 7 MT1
2009-2010 Section E

CORRIGÉ DE L'EXAMEN PARTIEL DU 21 NOVEMBRE 2009
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

7 exercices. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soient a et b des réels > 0. On pose $m = \frac{1}{2}(a+b)$ et on définit h par $h^{-1} = \frac{1}{2}(a^{-1}+b^{-1})$. Montrer que $h \leqslant m$.

On a
$$h^{-1} = \frac{1}{2}(a^{-1}+b^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\frac{b+a}{ab} = \frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}.$$
d'où $h = \frac{2ab}{a+b}$. L'inégalité à démontrer s'écrit donc
$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$
Puisque $a > 0$ et $b > 0$ elle est successivement équivalente aux inégalités
$$\begin{aligned}&(a+b)^2 \geqslant 4ab\\ &a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab\\ &a^2-2ab+b^2 \geqslant 0\\ &(a-b)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$
Elle est donc vérifiée quels que soient $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 2. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ des points du plan.

a) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ si et seulement si les segments AC et BD ont même milieu.

b) On suppose cette condition satisfaite. Montrer qu'on a $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DA}$ si et seulement si les segments AC et BD sont orthogonaux.

a) « *Si.* » Il s'agit de montrer que si les segments AC et BD ont même milieu, alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$. Soit I le milieu commun des segments AC et BD. Par hypothèse on a
$$\overrightarrow{\mathrm{IA}} = -\overrightarrow{\mathrm{IC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{IB}} = -\overrightarrow{\mathrm{ID}}.$$
d'où
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}} - \overrightarrow{\mathrm{IA}} = -\overrightarrow{\mathrm{ID}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}} = \overrightarrow{\mathrm{IC}} - \overrightarrow{\mathrm{ID}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}.$$
« *Seulement si.* » Il s'agit de montrer que si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, alors le milieu I du segment AC et le milieu J du segment BD sont confondus. Choisissons un point O. On a
$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}), \quad \overrightarrow{\mathrm{OJ}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}),$$
d'où
$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}} - \overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}).$$
Puisque par hypothèse on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} = -\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, on $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 0$, d'où $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Il y a des dizaines d'autres rédactions possibles.

b) Si la condition de la question précédente est satisfaite, on a $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ (puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{CD}}$), ainsi que $\mathrm{BC} = \mathrm{DA}$. Pour démontrer cette dernière relation sans faire appel aux propriétés du parallélogramme, on observe que $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\overrightarrow{\mathrm{DA}}$.

Il s'agit donc seulement de démontrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$.

Pour cela on observe que

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}).(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}).(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}) \quad \textit{(puisque } \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}\textit{)} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{DB}}.\end{aligned}$$

Exercice 3. On considère la droite D de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $\mathrm{A} = (1,1,1)$ et de vecteur directeur $\mathrm{V} = (0,-1,3)$. On considère le point $\mathrm{B} = (2,6,0)$.

a) Donner une représentation paramétrique de D.

b) Montrer que pour tout point M de D, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ sont linéairement indépendants.

c) Donner l'équation du plan contenant le point B et la droite D.

a) Une représentation paramétrique de la droite d'origine A et de vecteur directeur V est $\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\mathrm{V}$ ($t \in \mathbb{R}$). En coordonnées, et avec les données de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

sous forme matricielle ou

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

sous forme de trois équations scalaires.

b) L'énoncé comporte une petite erreur : il fallait lire « *pour tout point* M *de* D *distinct de* A ».

Le point B n'appartient pas à la droite D, puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,5,-1)$ n'est pas colinéaire à V.

Soit M un point de D distinct de A. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ est colinéaire à V et non nul. Si $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ ne sont pas indépendants, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ est multiple de $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ (puisque $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \neq 0$) donc de V, ce qui est impossible. Conclusion : $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ sont indépendants.

c) Le plan en question a pour équation paramétrique $\mathrm{M} = \mathrm{A} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\mathrm{V}$. On peut tirer de là son équation, mais cela fait l'objet de l'exercice 5, avec des données différentes.

Employons une autre méthode (*méthode des coefficients indéterminés* si on veut lui donner un nom). L'équation cherchée est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Elle doit être satisfaite par les coordonnées du point A, par celles du point B, et l'équation homogène associée $ax + by + cz = 0$, doit être satisfaite par celle du vecteur V. On doit donc avoir

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2a + 6b + d = 0 \\ -b + 3c = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système de 4 équations linéaires à 3 inconnues est immédiate : on tire de la dernière équation $b = 3c$. En reportant dans les deux premières équations on obtient le système en a et d

$$\begin{cases} a + d = -4c \\ 2a + d = -18c \end{cases}$$

qui se résout immédiatement : $a=-14c$, $d=10c$. On peut choisir $c=1$ (par exemple, car toutes les solutions sont proprtionnelles). L'équation cherchée est

$$-14x+3y+z+10=0.$$

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs (représentés par leur matrice-colonne)

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{V}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathrm{W}=\begin{pmatrix}1\\1\\m\end{pmatrix}.$$

a) Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m\neq\frac{2}{3}$.
On suppose dans les questions suivantes que $m=\frac{2}{3}$.

b) Montrer que pour qu'un vecteur $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire de $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ il faut et il suffit que $\det(\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{A})=0$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a,b,c pour que le système d'équations linéaires

$$(\mathrm{S})\qquad \begin{cases}2x+y+z=a\\ x+2y+z=b\\ x+y+\dfrac{2}{3}z=c\end{cases}$$

ait au moins une solution.

d) Lorsque le système (S) a au moins une solution, l'ensemble des solutions est-il un point, une droite, ou un plan de $\mathbb{R}^3$?

a) Les vecteurs $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si leur déterminant est nul. Ce déterminant vaut

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&m\end{vmatrix}=-1-1+3m=3m-2$$

(on a développé par rapport à la dernière colonne). Il s'annule pour $m=2/3$.

b) Par hypothèse, le déterminant de $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ est nul. Donc ces trois vecteurs sont liés. Mais, de plus, on observe que U et V sont indépendants (ils ne sont pas colinéaires). Par suite W est combinaison linéaire de U et V, par exemple $\mathrm{W}=\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V}$

Si le vecteur A est combinaison linéaire des trois vecteurs $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}=\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V}$, il est donc combinaison linéaire de U et V, et inversement, puisque une combinaison linéaire de U et V est toujours une combinaison linéaire de $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ (en donnant le coefficient 0 à W).

Pour que A soit combinaison linéaire de $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$, il est donc nécessaire et suffisant que A soit combinaison linéaire de U et V, et pour cela, il faut et il suffit que

$$\det(\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{A})=0$$

(parce que U et V sont indépendants ; s'ils ne l'étaient pas la condition serait nécessaire, mais pas suffisante).

c) Dire que le système a une solution, c'est dire qu'il existe trois réels tels que

$$x\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

c'est donc dire que A est combinaison linéaire de $\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{W}$ et d'après la question précédente, cela équivaut à la condition

$$\det(\mathrm{U},\mathrm{V},\mathrm{A})=0,$$

laquelle s'écrit

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$-a-b+3c=0.$$

d) Quand cette condition est satisfaite, la troisième ligne du système (S) est une combinaison linéaire des deux premières : $L_3 = \frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{3}L_2$, et le système se réduit aux deux premières équations :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=a \\ x+2y+z=b \end{cases}$$

Il s'agit d'un système formé par deux équations de plans non parallèles. L'ensemble des solutions est donc une droite de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Donner un repère et une équation cartésienne du plan défini par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3-s-2t \\ y = 2+s-t \qquad (s,t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+3s+t. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme il revient au même de dire que

$$M = A + su + tv \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique du plan ou que (A,u,v) est un repère du plan (lorque u et v ne sont pas indépendants la représentation n'est pas une représentation paramétrique de plan), un repère du plan est donné par le point $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On observe que u et v ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan (car n'étant pas colinéaire, ils forment une famille libre de deux vecteurs et engendrent un plan vectoriel).

Afin de donner une équation cartésienne du plan on peut procéder de deux façons.

Première méthode. Le plan est donné par la représentation paramétrique

$$(1) \qquad \begin{cases} x = 3-s-2t \\ y = 2+s-t \\ z = 1+3s+t \end{cases}.$$

L'ensemble de ces relations est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 3-s-2t \\ x+y = 5-3t \\ 3x+z = 10-5t \end{cases}.$$

(on a fait les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$) ou encore à

$$\begin{cases} x = 3-s-2t \\ x+y = 5-3t \\ 4x-5y+3z = 5 \end{cases}.$$

(on a fait $L_3 \leftarrow 3L_3 - 5L_2$).

Finalement, une équation cartésienne du plan est donnée par

$$4x - 5y + 3z - 5 = 0.$$

En effet, pour x, y, z donnés cette relation est une conséquence de (1), et inversement si elle est satisfaite on peut tirer des deux premières relations une valeur de s et une valeur de t pour lesquelles les relations (1) sont satisfaites.

Deuxième méthode. Le point M appartient au plan s'il existe un réel s et un réel t tels que $M = A + su + tv$, ou ce qui revient au même $\overrightarrow{AM} = su + tv$. Autrement dit, M appartient au plan si $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de u et v.

Comme u et v sont indépendants, une condition nécessaire et suffisante pour que ce soit le cas est

$$\det(\overrightarrow{AM}, u, v) = 0.$$

En coordonnées, cette relation s'écrit

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit en développant

$$4(x-3) - 5(y-2) + 3(z-1) = 0$$

ou

$$4x - 5y + 3z - 5 = 0.$$

Exercice 6. On rappelle que l'équation générale des plans contenant la droite d'équation

$$\begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

est

$$\alpha(x - y - z - 1) + \beta(2x + y + z + 2) = 0$$

où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

a) Comment démontre-t-on ce résultat ?

Parmi ces plans, y a-t-il :

b) un plan vertical (parallèle à Oz) ?

c) un plan parallèle à xOy ?

d) un plan orthogonal au vecteur $(1, -1, 1)$?

e) un plan parallèle au vecteur $(1, -1, 1)$?

f) un plan passant par l'origine ?

a) Si un point (x, y, z) vérifie $x - y - z - 1 = 0$ et $2x + y + z + 2 = 0$, alors pour tous α et β il vérifie aussi

$$\alpha(x - y - z - 1) + \beta(2x + y + z + 2) = 0,$$

c'est-à- dire qu'il est bien dans le lieu défini par cette équation. Cette dernière équation s'écrit encore, en développant et regroupant :

$$(\alpha + 2\beta)x + (-\alpha + \beta)y + (-\alpha + \beta)z + (-\alpha + 2\beta) = 0;$$

Le lieu est un plan si $(\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, -\alpha + \beta) \neq (0, 0, 0)$, ce qui est justement le cas si et seulement si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Ainsi l'équation générale proposée représente bien un plan contenant la droite. Il faut, réciproquement, montrer qu'un plan quelconque, d'équation $ax + by + cz + d = 0$, avec donc $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et contenant la droite considérée, admet une équation de la forme proposée. Or, dire que le plan contient la droite signifie exactement que les solutions du système

$$\begin{cases} x-y-z & = 1 \\ 2x+y+z & = -2 \\ ax+by+cz & = -d \end{cases}$$

constituent une droite, et puisque les deux premières équations ne sont pas proportionnelles, cela signifie que la dernière est une combinaison linéaire de ces deux premières, ce qui donne précisément, en identifiant les coefficients, $a = \alpha+2\beta, b = -\alpha+\beta, c = -\alpha+\beta, d = -\alpha+2\beta$, et la forme proposée.

Une autre méthode a été donnée en cours et figure dans le polycopié.

b) Oui : Un plan est vertical si dans son équation le coefficient de z est 0 ; ici cela signifie que$-\alpha+\beta = 0$, et c'est bien possible.

c) Non : Un plan est parallèle à xOy si son équation est de la forme $z = k$, soit ici si $\alpha+2\beta = 0$ et $-\alpha+\beta = 0$; ce n'est pas possible, puisque cela implique $\beta = 0$ et $\alpha = 0$.

d) Non : Un plan est perpendiculaire à $(1,-1,1)$ si son vecteur normal, formé avec les coefficients de x, y et z, est un multiple de $(1,-1,1)$, ce qui ici signifie que $(\alpha+2\beta, -\alpha+\beta, -\alpha+\beta) = k(1,-1,1)$ pour un $k \neq 0$, ce qui est impossible, puisque de là on déduirait $-\alpha+\beta = -k$ et $-\alpha+\beta = k$, d'où $-1 = 1$.

e) Oui : Un plan est parallèle à un vecteur si son vecteur normal est perpendiculaire à ce vecteur, si donc leur produit scalaire est nul ; ici il faut $(\alpha+2\beta, -\alpha+\beta, -\alpha+\beta).(1,-1,1) = 0$, soit $\alpha+2\beta-(-\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta) = 0$, soit $\alpha+2\beta = 0$, ce qui est bien possible.

f) Oui : le plan passe par l'origine si la constante dans l'équation vaut 0, soit ici si $-\alpha+2\beta = 0$, ce qui est bien possible.

OBSERVATION HISTORIQUE. Le principe montré en *a*) est introduit par Gabriel Lamé en 1818 dans un petit livre de méthodes géométriques (*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*) destiné aux élèves préparant l'Ecole polytechnique. Le point *a*) correspond à son Problème III, p. 34. Il est examiné dans ce livre le même principe pour des équations du second degré à deux ou trois inconnues (équations de surfaces du second degré) et appliqué à la résolution originale des problèmes d'intersections de telles surfaces. C'est en fait le point de départ d'une méthode centrale pour la géométrie algébrique, appelée ensuite *méthode des notations abrégées*. À titre d'exercice on cherchera le texte de Lamé sur Internet, et on y lira, en page 34, son explication de *a*).

Exercice 7. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer que B peut se mettre sous la forme $\mathrm{B} = a\mathrm{I} + b\mathrm{A}$.

b) Montrer que si une matrice M de format 2×2 commute avec A, elle est de la forme $a\mathrm{I}+b\mathrm{A}$ avec a, b réels.

a) On vérifie que

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{BA}$$

(sur une copie, il vaut mieux poser les multiplications) et que

$$\mathrm{B} = 7\mathrm{I} - 5\mathrm{A}.$$

b) Le calcul donne

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ commute avec A si et seulement si $x = x+z$, $x+y = y+t$, $z+t = t$, c'est-à-dire si $x = t$, $z = 0$, autrement dit si X est de la forme

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-y)\mathrm{I} + y\mathrm{A}.$$