

SECTION C (B. Gentou) - Amphi 6C, salles 227C et 027C

Partiel du 7 novembre 2009

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. Questions de cours

- a) Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
Donner la définition de *l'injectivité* de f .
Puis donner un exemple d'application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- b) Soit P une fonction polynôme.
Donner la définition d'une *racine α de multiplicité exactement 3* (racine triple) de P .
Puis donner un exemple de fonction polynôme admettant 1 comme racine triple.
- c) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Donner la définition de *l'indépendance linéaire de la famille* $(u_1, \dots, u_p)$ (c.a.d. $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre).
Donner un exemple de famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré suivante : $z^2 - iz - (1 + i) = 0$.

Exercice 3.

Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Écrire z sous la forme polaire $z = r e^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

En déduire le module et l'argument appartenant à $[0, 2\pi[$ de z^7 .

Exercice 4.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$, pour tout réel x .

- a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{4\}) , f^{-1}(]-\infty, -1]) , f^{-1}([1, +\infty[) , f([-1, +\infty[) , f([1, +\infty[) .$$

- b) Donner un exemple de deux parties A et B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) .$$

Exercice 5.

Soient P et Q les fonctions polynômes suivantes

$$P(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + x - 1 , \quad Q(x) = x^2 - x + 1 .$$

Effectuer la division euclidienne de P par Q .

Exercice 6.

Soit la fonction polynôme $P(x) = x^5 - 1$.

- a) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ (c.a.d. écrire P comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$).
- b) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Rappel :

$\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 5z = 0 \text{ et } x + y - 4z = 0\}$.

- a) Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- b) Déterminer une base de F .

Exercice 8.

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1, 2)$, $u_3 = (1, 1, 0, 3)$.

- a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.
- b) A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- c) Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1, u_2, u_3) .

Exercice 9.

Déterminer, en le justifiant, deux plans vectoriels (sous-espaces vectoriels de dimension 2)

P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$.

Est-ce possible dans $\mathbb{R}^3$?