Correction du partiel du 7/11/09

Exercice 1. Questions de cours

a. Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application.
Donner la définition de *l'injectivité* de f.
Puis donner un exemple d'application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Soit P une fonction polynôme.
Donner la définition d'une *racine α de multiplicité exactement 3* (racine triple) de P.
Puis donner un exemple de fonction polynôme admettant 1 comme racine triple.

c. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Donner la définition de *l'indépendance linéaire de la famille* $(u_1, \ldots, u_p)$ (c.a.d. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre).
Donner un exemple de famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

Correction :

a. f est injective si et seulement si tout élément de F a au plus un antécédent par f dans E.

Autre formulation équivalente : f est injective si et seulement si pour tous éléments x et x' de E, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

***Exemple** : l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$, est injective car, d'après sa définition, pour tous réels x et x', $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x')$ implique $x = x'$.*

b. α est une racine de P de multiplicité exactement 3 si et seulement si $(x-a)^3$ divise P et $(x-a)^4$ ne divise pas P.

***Exemple** : la fonction polynôme $P(x) = (x-1)^3$ admet de manière évidente 1 comme racine exactement triple.*

c. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est linéairement indépendante si et seulement si :
***Pour tous réels** $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.*

***Exemple** : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u_1, u_2) avec $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,0)$ est linéairement indépendante.*
En effet, soit λ_1 et λ_2 des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (1).
(1) équivaut au système $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$ (CQFD).

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré suivante: $z^2 - \mathrm{i}z - (1+\mathrm{i}) = 0$.

Correction :
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-\mathrm{i})^2 + 4(1+\mathrm{i}) = 3 + 4\mathrm{i}$.

Calculons les racines carrées de Δ sous la forme $x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels. On a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = 3+4\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow x+iy=-2-\mathrm{i} \text{ ou } x+iy=2+\mathrm{i}$$

Les racines carrées de Δ sont donc $-2-\mathrm{i}$ et $2+\mathrm{i}$.

On en déduit que les solution de l'équation sont $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}-2-\mathrm{i}}{2} = -1$ et $z_2 = \dfrac{\mathrm{i}+2+\mathrm{i}}{2} = 1+\mathrm{i}$

Exercice 3.
Soit $z = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Écrire z sous la forme polaire $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ avec $r>0$ et $t\in\mathbb{R}$.
En déduire le module et l'argument appartenant à $[0,2\pi[$ de z^7.

Correction : *On a $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ et $\dfrac{z}{|z|} = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$.*

L'écriture polaire de z est donc $z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$.

On en déduit que $z^7 = 2^7\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}14\pi/3}$.

z^7 a donc pour module $2^7 = 128$.

De plus, z^7 admet comme argument $\dfrac{14\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{2\pi}{3}$. Donc l'argument de z^7 dans l'intervalle $[0,2\pi[$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 4.
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$, pour tout réel x.

a. Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{4\})\ ,\ f^{-1}(]-\infty,-1])\ ,\ f^{-1}([1,+\infty[)\ ,\ f([-1,+\infty[)\ ,\ f([1,+\infty[)\,.$$

b. Donner un exemple de deux parties A et B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles

$$f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)\,.$$

Correction :

a. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2,+2\}$ *, car pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$.*
$f^{-1}(]-\infty,-1]) = \emptyset$ *, car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ donc $f(x)\notin]-\infty,-1]$.*
$f^{-1}([1,+\infty[) =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. *En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant -1$ ou $x\geqslant 1$.*
$f([-1,+\infty[) = [0,+\infty[$. *En effet, $f([-1,+\infty[) = f([-1,0]\cup[0,+\infty[) = [0,1]\cup[0,+\infty[= [0,+\infty[$.*
$f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$, *car f est croissante et continue sur $[1,+\infty[$ et $f(1)=1$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.*
NB *: on peut aussi justifier tous ces résultats à l'aide d'un tableau des variations de la fonction f. Pour être rigoureux, il faut utiliser la continuité de f (voir chapitre à venir du cours sur la continuité).*

b. Si $A = \{-1\}$ et $B = \{1\}$, alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, et $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.

Exercice 5.
Soient P et Q les fonctions polynômes suivantes

$$P(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + x - 1\,, \quad Q(x) = x^2 - x + 1.$$

Effectuer la division euclidienne de P par Q.

Correction : Méthode de calcul sur un exemple
Le calcul de la division division euclidienne $P(x)$ par $Q(x)$ donne :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 5x^4 & -8x^3 & +3x^2 & +x & -1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{7-7}
\ominus & 5x^4 & -5x^3 & +5x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^3 & -2x^2 & +x & -1 & 5x^2 - 3x - 5 \\
 & \ominus & -3x^3 & +3x^2 & -3x & & \\ \cline{3-6}
 & & & -5x^2 & +4x & -1 & \\
 & & \ominus & -5x^2 & +5x & -5 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -x & +4 &
\end{array}$$

Le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ est $5x^2 - 3x - 5$ et le reste $-x + 4$, ce qui traduit l'égalité $P(x) = (5x^2 - 3x - 5)\ Q(x) - x + 4$.

Exercice 6.
Soit la fonction polynôme $P(x) = x^5 - 1$.

a. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ (c.a.d. écrire P comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$).

b. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Rappel :
$\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Correction :

a. Les racines complexes de la fonction polynôme $P(x) = x^5 - 1$ sont les racines cinquième de l'unité, c'est-à-dire les cinq nombres suivants :

$$u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\,, \qquad \textit{avec } k = 0, \ldots, 4\,.$$

Comme toutes ces racines sont simples, il suit que la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P(x) = \prod_{k=0}^{4} (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}})$$

b. La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ se déduit de celle dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les facteurs correspondants aux racines non réelles conjuguées, i.e. u_1 et u_4, u_2 et u_3, ce qui donne : $(x - u_1)(x - u_4) = x^2 - 2\,Re(u_1)\,x + |u_1|^2 = x^2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)\,x + 1$

$(x-u_2)(x-u_3) = x^2 - 2\,Re(u_2)\,x + |u_2|^2 = x^2 - 2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)\,x + 1$

La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 - 2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)\,x+1\right)\left(x^2 - 2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)\,x+1\right).$$

Exercice 7.
On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+5z=0 \text{ et } x+y-4z=0\}$.

a. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base de F.

Correction :

a. *F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car c'est l'ensemble des solutions d'un système homogène d'équations linéaires à 3 inconnues.*

__Remarque__ : les propriétés de SEV peuvent aussi se vérifier directement : F est non vide car il contient le vecteur nul et F est stable par combinaison linéaire (à écrire).

b. *Soit $v = (x,y,z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. $v \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+5z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$.*

On échelonne ce système par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} x-y+5z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+5z=0 \ (L_1) \\ 2y-9z=0 \quad (L_2-L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}z=0 \ (L_1+L_2/2) \\ y-\frac{9}{2}z=0 \ (L_2/2) \end{cases}$$

En posant $z=\lambda$, on en déduit que $v \in F \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ v = \lambda(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 1)$.

F est donc la droite de vecteur directeur $u = (1,-9,-2)$

Exercice 8.
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,0,1,1)$, $u_2 = (0,1,1,2)$, $u_3 = (1,1,0,3)$.

a. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une famille libre.

b. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1,u_2,u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer une équation du sous-espace vectoriel F engendré par la famille (u_1,u_2,u_3).

Correction :

a. *Soient α_1, α_2 et α_3 quelconques dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (1).*

En notant les vecteurs en colonne, (1) s'écrit : $\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

On échelonne ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{array}$$

Dans ce système homogène échelonné, chaque inconnue possède un pivot donc il admet une solution unique qui est $(0,0,0)$.

On en conclut que (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

b. *D'après le cours : "Dans un espace vectoriel de dimension n, le cardinal d'une famille génératrice est au moins n". Or $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 et (u_1, u_2, u_3) est de cardinal 3 donc cette famille ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^4$.*

c. *On recherche les vecteurs $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ qui sont des combinaisons linéaires de (u_1, u_2, u_3), c'est-à-dire tels qu'il existe des réels α_1, α_2, α_3 vérifiant*
$(x, y, z, t) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ (2).

On échelonne le système (2) par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 2 & 3 & t \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-x \\ 0 & 2 & 2 & t-x \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -2 & z-x-y \\ 0 & 0 & 0 & t-x-2y \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - 2L_2 \end{array}$$

Ce système échelonné admet des solutions si et seulement si $0 = t - x - 2y$.

On en conclut qu'une équation du sous espace $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ est $\quad x + 2y - t = 0$.

Exercice 9.
Déterminer, en le justifiant, deux plans vectoriels (sous-espaces vectoriels de dimension 2) P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$.

Est-ce possible dans $\mathbb{R}^3$?

Correction :

Dans $\mathbb{R}^4$, notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique, P_1 le plan de base (e_1, e_2), P_2 le plan de base (e_3, e_4).

Soit u un vecteur de $P_1 \cap P_2$.

$u \in P_1$ donc il existe des réels α_1 et α_2 tels que $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ (1).

$u \in P_2$ donc il existe des réels α_3 et α_4 tels que $u = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$ (2).

D'après (1) et (2), $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = 0$.

Or la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et par conséquent $u = 0$.

On en conclut que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$.

On montre par l'absurde que c'est impossible dans $\mathbb{R}^3$:

Soit deux plans vectoriels quelconques P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$. D'après un théorème du cours sur la dimension d'une somme d'espaces vectoriels : $\dim P_1 + \dim P_2 = \dim(P_1 + P_2) + \dim(P_1 \cap P_2)$.

Supposons que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, alors $\dim(P_1 \cap P_2) = 0$.

Comme $\dim P_1 = \dim P_2 = 2$ *(définition d'un plan vectoriel), on en déduit que* $\dim(P_1 + P_2) = 4$.

Or $P_1 + P_2$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ donc $\dim(P_1 + P_2) \leqslant 3$. L'hypothèse $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ est donc fausse.

***Autre démonstration "à la main"** :*

Soit deux plans vectoriels quelconques P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$. On note (u_1, v_1) une base de P_1 et (u_2, v_2) une base de P_2.

Supposons que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, on montre que la famille (u_1, v_1, u_2, v_2) est alors libre.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des réels tels que $\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2 = 0$ (3).

On pose $w = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1$.

w est un vecteur de P_1 puisque (u_1, v_1) est une base de P_1.

Mais w appartient aussi à P_2 car, d'après (3), $w = -\alpha_2 u_2 - \beta_2 v_2$.

L'hypothèse $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ implique alors $w = 0$.

Il suit que : $\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 = 0 = \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2$ (4).

Comme chacune *des familles (u_1, v_1) et (u_2, v_2) est libre, (4) $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$.*

On a montré que la famille (u_1, v_1, u_2, v_2) est libre, mais cela est impossible car une famille libre de $\mathbb{R}^3$ est de cardinal au plus 3*, donc l'hypothèse $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ est fausse.*