Université Paris 7 | MT1 MM1
L1, Sciences exactes | 2009-2010

SECTION B (T. Joly) - Amphi 13E, salles 574F et 575F

Partiel du 7 novembre 2009

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculettes et les téléphones portables.

1) **Questions de cours**

   a) Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. Donner la définition de *l'injectivité* de f. Donner un exemple d'application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   b) Soit f un polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la définition d'une *racine triple* de f. Donner un exemple de polynôme admettant 1 comme racine triple.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré suivante : $z^2 - \mathrm{i}z - (1+\mathrm{i}) = 0$.

3) Soit $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Écrire z sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. En déduire le module et l'unique argument appartenant à $]-\pi, \pi]$ de z^7.

4) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$, pour tout réel x.

   a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f^{-1}(\{4\})\,,\ f^{-1}(]-\infty,-1])\,,\ f^{-1}([1,+\infty[)\,,\ f([-1,+\infty[)\,,\ f([1,+\infty[)\,.$$

   b) Donner un exemple de deux parties A et B de $\mathbb{R}$ pour lesquelles

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)\,.$$

5) On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + 3z = 0\}\,,\ E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + 5z = x + y - 4z = 0\}\,.$$

   a) Prouver que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

   b) Trouver une base de E_1 et une base de E_2.

6) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{u}_1 = (0,1,-3,4)\,,\ \vec{u}_2 = (1,2,-1,-1)\,,\ \vec{u}_3 = (-1,m,-2,5)\,,$$

où m est un paramètre réel. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces trois vecteurs.

a) Mettre en évidence un système de vecteurs échelonné qui engendre E.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-il un système libre ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de m le sous-espace vectoriel E est-il un plan vectoriel ?

7) Soit f le polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^5 - 1$ pour tout réel x.

a) Factoriser f comme produit de cinq polynômes de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

b) Factoriser f comme produit d'un polynôme de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{R}$, et de deux polynômes de degré 2, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

8) Soient f et g les polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 + x - 1\,, \quad g(x) = x^2 - x + 1\,, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\,.$$

Effectuer la division euclidienne de f par g.

9) Déterminer deux plans vectoriels (SEV de dimension 2) P_1, P_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Est-ce possible dans $\mathbb{R}^3$?