

EXAMEN DU 4 JANVIER 2010
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Questions de cours. a) Énoncé du théorème des accroissements finis.

b) Définition de la fonction Arc sinus.

c) Donner la valeur de $\text{Arc sin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et de $\text{Arc sin}(\sin 2\pi)$.

Exercice 1. Donner une représentation paramétrique du plan P d'équation

$$3x - 4y + 2z = 5.$$

Exercice 2. Soit D la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que le point A de coordonnées $1/3, -1/3, 0$ appartient à D.

b) Donner l'équation du plan passant par A et orthogonal à D.

c) Donner l'équation du plan contenant D et parallèle à Ox.

Exercice 3. On note P_n le produit des n racines n -ièmes complexes de 1.

a) Calculer P_2, P_3, P_4 .

b) Calculer P_n . (On rappelle que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.)

c) Soit $A(x)$ le polynôme unitaire

$$A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

à coefficients réels ou complexes. On note $z_1, \dots, z_n$ les racines de $A(x)$, comptées avec leur multiplicité. On pose $s = z_1 + \dots + z_n$ (somme des racines de A) $p = z_1 \dots z_n$ (produit des racines de A). En écrivant

$$A(x) = (x - z_1) \dots (x - z_n),$$

déterminer s et p en fonction des coefficients de A.

d) À l'aide du résultat de la question c), retrouver la valeur de P_n obtenue en b).

Exercice 4. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note F la transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ associe le vecteur $U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ défini par

$$U' = AU$$

a) La transformation F est-elle bijective ?

b) Donner un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à l'image de F.

c) Donner deux éléments de $\mathbb{R}^3$ ayant la même image par F .

d) La transformation F est-elle injective ? surjective ?

e) On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$V_0 = AU_0, \quad W_0 = AV_0, \quad T_0 = AW_0.$$

Vérifier que T_0 est colinéaire à V_0 .

f) Montrer que les trois vecteurs U_0, V_0, W_0 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

g) Quelle est la matrice de la transformation linéaire F dans cette base ?

Exercice 5. On pose $f(x) = x^4 - x^3 - 1$.

a) Étudier les variations de f .

b) Déterminer les points d'inflexion de f et les intervalles sur lesquels f est convexe ou f est concave.

c) Esquisser le graphe de f .

Exercice 6. a) Montrer que l'équation $x^4 = 1 + x^3$ possède une racine positive a et une racine négative b , et que $1 < a < 2$. (Voir exercice précédent.)

On veut obtenir a comme limite d'une suite dont les termes sont faciles à calculer (on considère que le calcul d'une racine carrée, et donc celui d'une racine quatrième, est facile). Pour cela, on remplace l'équation donnée par l'équation

$$x = \sqrt[4]{1 + x^3},$$

qui est équivalente à l'équation donnée pour $x \geq 0$.

b) Pour $x \geq 0$ on pose

$$g(x) = \sqrt[4]{1 + x^3}.$$

Montrer que g applique l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même

c) Montrer que la fonction g est contractante sur $[1, 2]$.

(On rappelle que la dérivée de $(u(x))^\alpha$, où α est un réel fixé et $u(x)$ une fonction > 0 , est donnée par la même formule que quand $\alpha \in \mathbb{N}$: on a $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$.)

d) En déduire que la suite définie par $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + x_n^3}$ pour $n \geq 0$ a pour limite a .