PARIS 7 MT1
2009-2010 Section E

EXAMEN DU 4 JANVIER 2010
(Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits)

Questions de cours. *a*) Énoncé du théorème des accroissements finis.
b) Définition de la fonction Arc sinus.
c) Donner la valeur de $\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et de $\operatorname{Arc\,sin}(\sin 2\pi)$.

Questions de cours. *a*) *Théorème des accroissements finis.* Soit f une fonction définie et continue dans un intervalle contenant les points a et b ($a < b$), dérivable dans $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(formule des accroissements finis).

b) *Définition de la fonction Arc sinus.* En restreignant l'ensemble de définition de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et son ensemble d'arrivée à $[-1, 1]$, on obtient une fonction bijective strictement croissante. Il existe donc une fonction réciproque, définie sur $[-1, 1]$ et strictement croissante de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Cette fonction se note $x \mapsto \arcsin x$.

Cette définition est résumée ci-dessous :

$$x = \arcsin y \iff \begin{cases} y = \sin x \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

c) Puisque $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Puisque $\sin 2\pi = 0$, on a $\operatorname{Arc\,sin}(\sin 2\pi) = \operatorname{Arc\,sin} 0 = 0$. (On ne peut pas avoir $\operatorname{Arc\,sin}(\sin 2\pi) = 2\pi$ parce que 2π n'est pas dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.)

Exercice 1. Donner une représentation paramétrique du plan P d'équation

$$3x - 4y + 2z = 5.$$

Exercice 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique point $(X, Y, Z) \in P$ tel que $X = x$, $Y = y$, à savoir

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = \dfrac{1}{2}(-3x + 4y + 5) \end{cases}$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de P. En changeant les noms des variables, on met cette représentation sous la forme habituelle

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ t = \dfrac{1}{2}(-3s + 4t + 5) \end{cases} \qquad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

ou bien

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 2. Soit D la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que le point A de coordonnées $1/3, -1/3, 0$ appartient à D.

b) Donner l'équation du plan passant par A et orthogonal à D.

c) Donner l'équation du plan contenant D et parallèle à Ox.

Exercice 2. Soit D la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Il suffit de vérifier que les coordonnées du point A vérifient les équations de D. C'est bien le cas :

$$\frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + 0 = 0$$

$$2\Big(\frac{1}{3}\Big) - \Big(-\frac{1}{3}\Big) + 0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

b) On note P le plan passant par A et orthogonal à D.

Première solution. Si $\vec{k}$ est un vecteur directeur de D, l'équation du plan est $\vec{k}.\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$. On obtient un vecteur directeur de D en prenant $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, où B est un point de D distinct de M : on peut par exemple prendre $\mathrm{B} = (0, -1/2, 1/2)$; la vérification que B appartient à D est immédiate, et on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1/3, 1/6, -1/2)$. Le plan P a donc pour équation

$$\frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}(y + \frac{1}{3}) - \frac{1}{2}z = 0$$

soit

$$2x + y - 3z - \frac{1}{3} = 0.$$

Deuxième solution. Pour que le vecteur $\vec{k} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ soit un vecteur directeur de D, il faut et il suffit qu'il satisfasse les équations *homogènes* associées aux équations de D, autrement dit qu'on ait

$$\begin{cases} \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 0 \\ 2\mathrm{X} - \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = 0 \end{cases}$$

On voit que le vecteur défini par $\mathrm{X} = 2, \mathrm{Y} = 1, \mathrm{Z} = -3$ convient. (Si on ne le voit pas tout de suite, on peut décider de poser $\mathrm{Y} = 1$ et résoudre le système qui reste en X et Z, en espérant que ce système aura une solution.) L'équation du plan est $\vec{k}.\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$, ce qui s'écrit

$$2(x - \frac{1}{3}) + (y + \frac{1}{3}) - 3z = 0$$

ou

$$2x + y - 3z - \frac{1}{3} = 0.$$

Troisième solution. Notons $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ les vecteurs normaux des deux plans dont l'intersection définit D, à savoir $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ et $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$. Le point M appartient à P si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est orthogonal à D. Pour cela, il faut et il suffit que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ soit combinaison linéaire de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ (faire une figure). Et comme $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires, il faut et il suffit encore que

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0,$$

autrement dit que

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ y + \frac{1}{3} & 1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant, on obtient l'équation de P :

$$2x + y - 3z - \frac{1}{3} = 0.$$

c) On sait que l'équation d'un plan contenant D est de la forme

$$\alpha(x + y + z) + \beta(2x - y + z - 1) = 0,$$

ou encore

$$(\alpha + 2\beta)x + (\alpha - \beta)y + (\alpha + \beta)z - \beta = 0,$$

où α et β ne sont pas tous les deux nuls. On sait d'autre part qu'un plan est parallèle à Ox si le coefficient du terme en x dans son équation est égal à zéro. (Si on ne le sait pas, on écrit que le vecteur directeur de l'axe Ox, à savoir $(1, 0, 0)$ vérifie l'équation *homogène* associée à l'équation du plan, on retrouve la condition indiquée.) On obtient donc un plan satisfaisant aux conditions de l'énoncé en prenant

$$\alpha = 2, \beta = -1,$$

ce qui correspond au plan d'équation

$$3x + z + 1 = 0.$$

(On sait par ailleurs que ce plan est unique.)

Exercice 3. On note P_n le produit des n racines n-ièmes complexes de 1.

a) Calculer $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$.

b) Calculer P_n. *(On rappelle que* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.*)*

c) Soit $\mathrm{A}(x)$ le polynôme unitaire

$$\mathrm{A}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

à coefficients réels ou complexes. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $\mathrm{A}(x)$, comptées avec leur multiplicité. On pose $s = z_1 + \cdots + z_n$ (somme des racines de A) $p = z_1 \ldots z_n$ (produit des racines de A). En écrivant

$$\mathrm{A}(x) = (x - z_1) \ldots (x - z_n),$$

déterminer s et p en fonction des coefficients de A.

d) À l'aide du résultat de la question *c*), retrouver la valeur de P_n obtenue en *b*).

Exercice 3. *a*) Les racines carrées de 1 sont 1 et -1. On a donc $\mathrm{P}_2 = -1$.

Les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2. Leur produit est égal à j^3, donc à 1. On a $\mathrm{P}_3 = 1$.

les racines quatrièmes de 1 sont 1, i, -1 et $-i$. Leur produit est égal à $i \times (-1) \times (-i) = i^2 = -1$. On a $\mathrm{P}_4 = -1$.

b) Les racines n-ièmes de 1 sont

$$e^{i\theta_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

avec $\theta_k = 2k\pi/n$. Leur produit est

$$\mathrm{P}_n = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\ldots e^{i\theta_n}$$

soit

$$\mathrm{P}_n = e^{i\theta}$$

avec

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \frac{2\pi}{n}(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{2\pi}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \pi(n+1).$$

On a donc

$$\mathrm{P}_n = e^{i\pi(n+1)} = (e^{i\pi})^{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Autrement dit,

$$\mathrm{P}_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

c) Développons le produit

$$A(x) = (x - z_1) \dots (x - z_n),$$

Le terme de degré n en x est x^n. Le terme de degré $n-1$ est la somme de tous les termes formés de $n-1$ facteurs égaux à x et du facteurs $(-z_k)$, il est donc égal à

$$-(z_1 + \cdots + z_n)x^{n-1}$$

Il n'y a dans le développement qu'un terme qui ne contienne pas de x, c'est le produit $(-z_1) \dots (-z_n)$, égal à $(-1)^n z_1 \dots z_n$. On a donc

$$A(x) = x^n - (z_1 + \cdots + z_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n z_1 \dots z_n.$$

En comparant avec la définition de $A(x)$, on obtient

$$s = -a_{n-1},\ p = (-1)^n a_0$$

d) Appliquons le résultat précédent en prenant $A(x) = x^n - 1$. On a ici $a_0 = -1$. Le produit des racines de $A(x)$, qui est le produit des racines n-ièmes de l'unité, est égal à $(-1)^n \times (-1)$, soit $(-1)^{n+1}$. On retrouve le résultat obtenu en *b*).

Exercice 4. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note F la transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ associe le vecteur $U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ défini par

$$U' = AU$$

a) La transformation F est-elle bijective ?

b) Donner un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à l'image de F.

c) Donner deux éléments de $\mathbb{R}^3$ ayant la même image par F.

d) La transformation F est-elle injective ? surjective ?

e) On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$V_0 = AU_0, \quad W_0 = AV_0, \quad T_0 = AW_0.$$

Vérifier que T_0 est colinéaire à V_0.

f) Montrer que les trois vecteurs U_0, V_0, W_0 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

g) Quelle est la matrice de la transformation linéaire F dans cette base ?

Exercice 4. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note F la transformation linéaire de $\mathbb{R}^3$ qui au vecteur $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ associe le vecteur $U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix}$ défini par

$$U' = AU$$

a) Calculons le déterminant de A. En développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3) - 3 - 2 \times (-3) = 0.$$

L'application F, qui A pour matrice, n'est donc pas bijective.

b) On observe qu'un élément (u', v', w') de l'image de F vérifie la relation $u' + v' + w' = 0$. Cela peut se faire de deux façons :

- ou bien on observe que les trois vecteurs-colonnes de A vérifient cette relation, qu'un élément quelconque de l'image de F est une combinaison linéaire des colonnes de A, et qu'enfin une combinaison linéaire de vecteurs vérifiant la la relation $u' + v' + w' = 0$ vérifie aussi cette relation,

- ou bien on fait le calcul : si $\mathrm{U}' = \mathrm{AU}$, on a

$$\begin{aligned} u' &= u + v - 2w \\ v' &= u - 2v + w \\ w' &= -2u + v + w \end{aligned}$$

et

$$u' + v' + w' = (u + v - 2w) + (u - 2v + w) + (-2u + v + w) = 0.$$

On obtient donc un vecteur n'appartenant pas à l'image de F en prenant n'importe quel vecteur U' tel que $u' + v' + w' \neq 0$, par exemple $\mathrm{U}' = (1, 0, 0)$.

c) Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ et le vecteur $(1, 1, 1)$ ont la même image par F, à savoir le vecteur nul.

d) La réponse à la question *c*) montre que F n'est pas injective, et la réponse à la question *b*) montre que F n'est pas surjective.

e) On pose $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\mathrm{V}_0 = \mathrm{AU}_0, \quad \mathrm{W}_0 = \mathrm{AV}_0, \quad \mathrm{T}_0 = \mathrm{AW}_0.$$

Vérifier que T_0 est colinéaire à V_0.

e) Le vecteur $\mathrm{V}_0 = \mathrm{AU}_0$ est la première colonne de A. On a donc $\mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a ensuite

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_0 = \mathrm{AV}_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ \mathrm{T}_0 = \mathrm{AW}_0 &= 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur T_0 est bien colinéaire à v_0 : on a $\mathrm{T}_0 = 9\mathrm{V}_0$.

f) On a

$$\det(\mathrm{U}_0, \mathrm{V}_0, \mathrm{W}_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0,$$

ce qui montre que les trois vecteurs $\mathrm{U}_0, \mathrm{V}_0, \mathrm{W}_0$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

g) Quelle est la matrice de la transformation linéaire F dans cette base ?

On obtient les colonnes de la matrice de F dans la base $(\mathrm{U}_0, \mathrm{V}_0, \mathrm{W}_0)$ en décomposant AU_0, AV_0, AW_0 dans cette base. Puisque $\mathrm{F}(\mathrm{U}_0) = \mathrm{V}_0$, $\mathrm{F}(\mathrm{V}_0) = \mathrm{W}_0$, $\mathrm{F}(\mathrm{W}_0) = \mathrm{T}_0 = 9\mathrm{V}_0$, la matrice est facile à déterminer : c'est

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{F}(\mathrm{U}_0) & \mathrm{F}(\mathrm{V}_0) & \mathrm{F}(\mathrm{W}_0) \end{array} \\ \mathrm{A}' = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathrm{U}_0 \\ \mathrm{V}_0 \\ \mathrm{W}_0 \end{array}$$

Exercice 5. On pose $f(x) = x^4 - x^3 - 1$.

a) Étudier les variations de f.

b) Déterminer les points d'inflexion de f et les intervalles sur lesquels f est convexe ou f est concave.

c) Esquisser le graphe de f.

Exercice 5. *a*) On a

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = 4x^2\Big(x - \frac{3}{4}\Big)$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et $x = \frac{3}{4}$. En dehors de ces points elle a le signe de $x - \frac{3}{4}$. D'où le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{283}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$

(Le nombre $-\frac{283}{256}$, minimum de f, est un peu inférieur à -1, très proche de $-1{,}1$.)

b) Déterminer les points d'inflexion de f et les intervalles sur lesquels f est convexe ou f est concave. On a

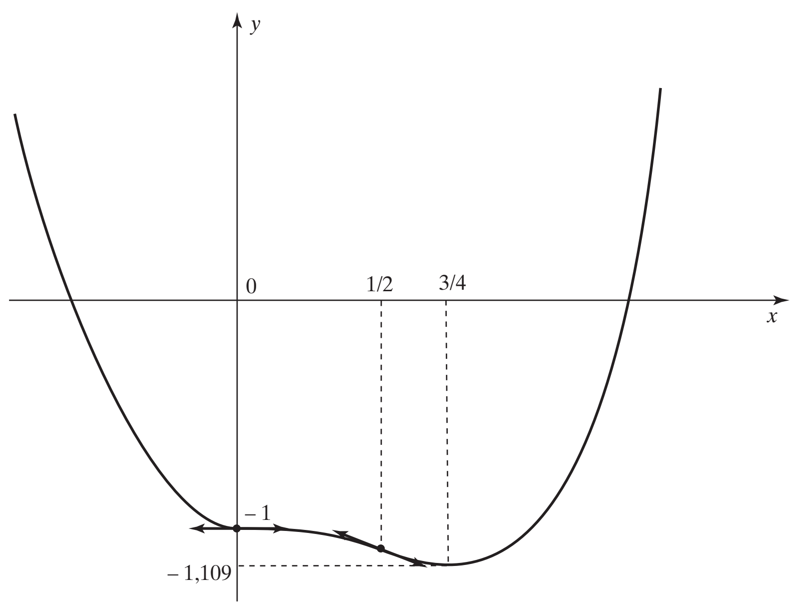
$$f''(x) = 12x^2 - 6x = 12x\Big(x - \frac{1}{2}\Big)$$

Cela permet de compléter le tableau de variation en indiquant la convexité

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{283}{256}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$		$\smile$		$\frown$		$\smile$			

On a un point d'inflexion quand la dérivée f' change de *sens de variation,* ou, ce qui revient au même, quand f'' change de *signe.* On a donc des points d'inflexion pour $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$. On note qu'en $x = 0$ on a un point d'inflexion à tangente horizontale, et que pour $x = \frac{1}{2}$, la pente de la tangente est négative.

c)



Exercice 6. *a*) Montrer que l'équation $x^4 = 1 + x^3$ possède une racine positive a et une racine négative b, et que $1 < a < 2$. *(Voir exercice précédent.)*

On veut obtenir a comme limite d'une suite dont les termes sont faciles à calculer (on considère que le calcul d'une racine carrée, et donc celui d'une racine quatrième, est facile). Pour cela, on remplace l'équation donnée par l'équation

$$x = \sqrt[4]{1 + x^3},$$

qui est équivalente à l'équation donnée pour $x \geqslant 0$.

b) Pour $x \geqslant 0$ on pose

$$g(x) = \sqrt[4]{1 + x^3}.$$

Montrer que g applique l'intervalle $[1, 2]$ dans lui-même

c) Montrer que la fonction g est contractante sur $[1, 2]$.

(On rappelle que la dérivée de $(u(x))^\alpha$, où α est un réel fixé et $u(x)$ une fonction > 0, est donnée par la même formule que quand $\alpha \in \mathbb{N}$: on a $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$.)

d) En déduire que la suite définie par $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + x_n^3}$ pour $n \geqslant 0$ a pour limite a.

Exercice 6. *a*) Les racines de l'équation $x^4 = 1 + x^3$ sont les zéros de la fonction f de l'exercice précédent. Cette fonction est continue, et

- sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, elle strictement décroissante $+\infty$ à -1. Elle s'annule donc une fois sur cet intervalle, en un point que suivant l'énoncé, nous notons b ;
- sur l'intervalle $[0, 3/4]$, elle est décroissante et inférieure à -1. Elle ne s'annule donc pas sur cet intervalle ;
- sur l'intervalle $[3/4, +\infty[$, elle est strictement croissante, de $-\frac{283}{256}$ à $+\infty$. Elle s'annule donc une fois sur cet intervalle, en un point que suivant l'énoncé, nous notons a. De plus on a $f(1) = -1$, $f(2) = 7$, ce qui montre que $1 < a < 2$.

b) Sur $[0, +\infty[$ la fonction g est croissante, puisqu'elle est la composée des fonctions croissantes $x \mapsto 1+x^3$ et $x \mapsto \sqrt[4]{x}$. Par suite, l'image de $[1, 2]$ par g est l'intervalle $[g(1), g(2)] = [\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{9}]$. Puisque $1 < 2 < 2^4 = 16$ et $1 < 9 < 2^4 = 16$, les nombres $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt[4]{9}$ sont tous deux compris entre 1 et 2. Il en découle que l'intervalle $[g(1), g(2)]$ est contenu dans $[1, 2]$.

c) On a

$$g'(x) = \frac{1}{4}\frac{3x^2}{(1 + x^3)^{3/4}}$$

Montrons que pour $x \geqslant 1$ on a

$$x^2 \leqslant (1 + x^3)^{3/4}.$$

En élevant à la puissance quatrième, on obtient l'inégalité équivalente

$$x^8 \leqslant (1 + x^3)^3.$$

qui s'écrit encore

$$x^8 \leqslant 1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9$$

et qui est donc trivialement vérifiée lorsque $x \geqslant 1$, puisqu'on a alors $x^8 \leqslant x^9$.

Il s'ensuit que pour $x \in [1, 2]$ on a

$$0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{3}{4}.$$

Grâce à l'inégalité des accroissements finis, on en déduit (en tenant compte aussi du résultat de la question *b*)) que la fonction g est contractante de rapport $\frac{3}{4}$ sur $[1, 2]$.

d) Puisque la fonction g applique $[1, 2]$ dans lui-même et qu'elle est contractante, le théorème du point fixe assure que la suite définie par $x_0 = 2$, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n \geqslant 0$ a une limite dans $[1, 2]$, et que cette limite est une solution de l'équation $x = g(x)$. Cette limite est solution de l'équation $x^4 = 1 + x^3$. Puisqu'elle est positive, elle est égale à a.