Université Paris 7 | MT1 MM1
L1, Sciences exactes | 2009-2010

SECTION C (B. Gentou) - Amphis 7C, 13E et salle 580F

Examen du 8 janvier 2010

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. Question de cours
Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 2.
On note $P(x) = x^6 - 1$ et $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. En déduire la factorisation du polynôme Q dans $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ et donner ses racines dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces F et G tels que
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \ \text{ et } \ 3x - y - z = 0 \ \}$,
G est engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (4, -1, 3)$ et $v_3 = (1, 2, -3)$.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F et donner sa dimension.
2. Montrer que G admet pour équation $x - 5y - 3z = 0$.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G et donner sa dimension.
4. Soit $\mathcal{E}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas une famille libre.
5. A l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, déterminer sans calculs supplémentaires si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
6. On note H l'espace engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{E}$. Pourquoi H contient-il les sous espaces F et G ? Déduire des résultats précédents que $\dim H = 2$.
7. On considère maintenant le sous-espace $K = F \cap G$.
   Par la méthode de votre choix, déterminer la dimension de K.
8. Comparer $\dim H + \dim K$ et $\dim F + \dim G$.

Exercice 4.
Déterminer les limites suivantes en justifiant vos résultats :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 2} - x\right)$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x) \ln(x^2)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-\sqrt{\ln x}} \cos x \, \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f en justifiant les résultats obtenus. Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner l'allure de son graphe.
2. On note g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que $g([1, +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où α est un réel que l'on précisera.
3. Montrer que g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\alpha, +\infty[$ et que l'application réciproque $g^{-1} : [\alpha, +\infty[\to [1, +\infty[$ est continue et strictement monotone.
4. Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$. Est-elle dérivable en α ?
5. Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Exercice 6.
On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 4 - \ln x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

NB : on rappelle que $2 < e < 3$.

1. Montrer que : $1 \leqslant \ln 4 \leqslant 2$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Montrer que l'équation $x + \ln x = 4$ a une solution et une seule dans $]0, +\infty[$ que l'on notera α. Encadrer α par deux entiers consécutifs.
3. En utilisant les encadrements précédents pour appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|/2.$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$. Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déterminer le signe de $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?