Université Paris 7 — MT1 MM1 section C

L1, Sciences exactes — 2009-2010

Correction de l'examen du 8 janvier 2010

Exercice 1. Question de cours

Énoncer le théorème des accroissements finis.

Correction : *soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.*

Exercice 2.

On note $P(x) = x^6 - 1$ et $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. En déduire la factorisation du polynôme Q dans $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ et donner ses racines dans $\mathbb{C}$.

Correction :

1. *Le calcul de la division division euclidienne du polynôme $P(x)$ par le polynôme $Q(x)$ s'écrit :*

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^6 & & & & & & -1 & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\
\ominus & x^6 & +x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & & \hline x-1 \\
\hline
 & & -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\
\ominus & & -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\
\hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit le résultat connu suivant : $x^6 - 1 = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\ (x-1)$.

2. *Les racines complexes du polynôme $P(x) = x^6 - 1$ sont les racines sixièmes de l'unité, c'est-à-dire $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} =$, $z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $z_4 = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ et $z_5 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.*

La factorisation de $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$ est donc $P(x) = \prod_{k=0}^{5}(x - z_k) = (x-1)\ \prod_{k=1}^{5}(x - z_k)$.

D'après la question 1, en divisant les 2 membres par $x - 1$, on en déduit que

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{5}(x - z_k) = (x - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})(x - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})(x+1)(x - e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}})(x - e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}})$$

Ceci est la factorisation de $Q(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines complexes sont par conséquent :

$$z_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{z}_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{z}_3 = -1,\ \mathrm{z}_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ \mathrm{z}_5 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 3.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces F et G tels que
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x + 2y + z = 0 \ \text{ et } \ 3x - y - z = 0\ \}$,
G est engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (4,-1,3)$ et $v_3 = (1,2,-3)$.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F et donner sa dimension.
2. Montrer que G admet pour équation $x - 5y - 3z = 0$.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G et donner sa dimension.

4. Soit $\mathcal{E}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas une famille libre.
5. A l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, déterminer sans calculs supplémentaires si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
6. On note H l'espace engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{E}$. Pourquoi H contient-il les sous espaces F et G ? Déduire des résultats précédents que $\dim H = 2$.
7. On considère maintenant le sous-espace $K = F \cap G$.
   Par la méthode de votre choix, déterminer la dimension de K.
8. Comparer $\dim H + \dim K$ et $\dim F + \dim G$.

Correction :

1. *F est l'ensemble des solutions du système* $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases}$.

   On échelonne ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} z+x+2y=0 \\ -z+3x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+x+2y=0 & L_1 \\ \quad 4x+\ y=0 & L_2+L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \quad -7x=0 & L_1-2L_2 \\ \quad y+4x=0 & L_2 \end{cases}$$

   Ce système a pour inconnue secondaire x et son ensemble de solution est $F = \{\lambda(1,-4,7)/\lambda \in \mathbb{R}\}$. On en déduit que F est la droite (dimension 1) de vecteur directeur $e_1 = (1,-4,7)$, donc on peut choisir $\mathcal{B}_1 = (e_1)$.

2. *On recherche les vecteurs $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qui sont combinaisons linéaires de $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (4,-1,3)$ et $v_3 = (1,2,-3)$, c'est-à-dire pour lesquels il existe des réels a, b et c tels que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$.*

   On échelonne le système linéaire $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$ d'inconnues a, b et c, par la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} a+4b+\ c=x \\ -a-b+2c=y \\ 2a+3b-3c=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b+\ c=x & L_1 \\ \quad 3b+3c=x+y & L_2+L_1 \\ \quad -5b-5c=-2x+z & L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4b+c=x & L_1 \\ \quad b+c=\frac{x+y}{3} & \frac{1}{3}L_2 \\ \quad 0=-x+5y+3z & 3L_3+5L_2 \end{cases}$$

   Ce système linéaire échelonné admet des solutions si et seulement si $x-5y-3z=0$ qui est donc une équation du sous-espace G.

3. *On peut extraire une base de la famille génératrice de G ou déterminer une base à partir de l'équation de G.*

   Selon cette deuxième méthode, on exprime l'ensemble des solutions de l'équation $x-5y-3z=0$ de manière paramétrique.

   En choisissant pour inconnues secondaires y et z, on obtient que $G = \{(5\lambda+3\mu, \lambda, \mu)/\lambda$ et μ réels$\} = \{\lambda(5,1,0)+\mu(3,0,1)/\lambda$ et μ réels$\}$.

   $e_2 = (5,1,0)$ et $e_3 = (3,0,1)$ sont donc générateurs de G, de plus ils sont non colinéaires donc libres. Par conséquent, on peut choisir $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_3)$ comme base de G qui est de dimension 2.

4. $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. *Plusieurs méthode sont possibles pour montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas une famille libre. On peut revenir à la définition (méthode classique). Soient α_1, α_2 et α_3 des réels quelconques vérifiant $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$.*
   On échelonne ce système d'inconnues α_1, α_2 et α_3 par la méthode du pivot de Gauss :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 5\,\alpha_2 & + & 3\,\alpha_3 & = & 0 \\ -4\,\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ 7\,\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_3 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ 3\,\alpha_3 & + & 5\,\alpha_2 & + & \alpha_1 & = & 0 & L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_1 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ & & 5\,\alpha_2 & - & 20\,\alpha_1 & = & 0 & L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_1 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3/5 - L_2 \end{array}\right.$$
   Ce système homogène échelonné a une inconnue secondaire donc il admet une solution non nulle et la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre.
5. *$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 et la famille $\mathcal{E}$ a pour cardinal 3.*
   D'après le cours, si une famille est de même cardinal que la dimension de l'espace alors elle est génératrice si et seulement si c'est une base ou encore si et seulement si elle est libre.
   On en déduit que $\mathcal{E}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.
6. *H contient e_1 donc également tous les vecteurs engendrés par e_1, c'est-à-dire F.*
   De même, H contient e_2 et e_3 donc également $\langle e_2, e_3\rangle = G$.
   G est de dimension 2 et $G \subset H$ donc $\dim H \geqslant 2$.
   De plus, H est inclus dans $\mathbb{R}^3$ donc $\dim H \leqslant 3$. Or si H était de dimension 3, $\mathcal{E}$ serait génératrice de $\mathbb{R}^3$, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.
   On en conclut que $\dim H = 2$, et donc que $H = G$ car $G \subset H$ et $\dim H = \dim G$.
7. *Nécessairement e_1 appartient au plan G sinon $\mathcal{E}$ engendrerait $\mathbb{R}^3$. On le vérifie facilement car $e_1 = (1, -4, 7)$ vérifie l'équation $x - 5y - 3z = 0$ de G.*
   Par conséquent la droite engendrée par e_1, c.a.d. F est incluse dans G et $K = F \cap G = F$.
   On en conclut que K est de dimension 1.
8. *On a $\dim H + \dim K = 3 = \dim F + \dim G$ ce qui est une application du théorème $\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$.*

Exercice 4.

Déterminer les limites suivantes en justifiant vos résultats :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2} - x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (x^2+x)\ln(x^2)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-\sqrt{\ln x}} \cos x \, \dfrac{2x^2+2x-1}{3x^2-3x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$

Correction :

1. *Pour tout $x > 0$,* $\sqrt{x^2+x+2} - x = \dfrac{(x^2+x+2)-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$.

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2} - x\right) = \dfrac{1}{2}$.

2. *Pour tout* $x > 0$, $(x^2 + x)\ln(x^2) = 2(x^2\ \ln(x) + x\ \ln(x))$.
   Or pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 + x)\ln(x^2) = 0$.

3. *Comme* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\ln x} = +\infty$, *on a* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} = 0$.
   De plus, $\dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{3}{x}}$ *pour* x *non nul et supérieur aux racines du dénominateur,*
   donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x} = \dfrac{2}{3}$.
   Enfin, la fonction $|\cos|$ *est majorée par 1.*
   On en déduit que, lorsqu'elle est définie, $\left|e^{-\sqrt{\ln x}}\ \cos x\ \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x}\right|$ *est positive et majorée par une expression qui tend vers 0 en* $+\infty$.
   On en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\ \cos x\ \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 3x}\right) = 0$.

4. *2 est une racine des polynômes* $N(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ *et* $D(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ *car* $N(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$ *et* $D(2) = 2^3 - 6.2^2 + 12.2 - 8 = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$.
   Les polynômes dérivés de N *et* D *sont* $N'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ *et* $D'(x) = 3x^2 - 12x + 12$. *Comme* $N'(2) \neq 0$ *et* $D'(2) = 0$, *2 est une racine simple de* N *et une racine multiple de* D.
   Par division euclidienne ou par identification, on obtient que
   $N(x) = (x - 2)(x^2 + x + 1)$ *et* $D(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^3$.
   Il suit que pour tout $x \neq 2$, $\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x - 2)^2}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 2} x^2 + x + 1 = 7$ *et* $\lim\limits_{x\to 2}(x - 2)^2 = 0^+$, *on en déduit que*
   $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = +\infty$.

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Étudier les variations de f en justifiant les résultats obtenus. Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner l'allure de son graphe.
2. On note g la restriction de f à $[1, +\infty[$. Montrer que $g([1, +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, où α est un réel que l'on précisera.
3. Montrer que g est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[\alpha, +\infty[$ et que l'application réciproque $g^{-1} : [\alpha, +\infty[\to [1, +\infty[$ est continue et strictement monotone.
4. Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$. Est-elle dérivable en α ?
5. Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Correction :

1. *f est une fonction impaire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   f' est donc strictement positive sur $]-\infty, -1[$ *et* $]1, +\infty[$ *et strictement négative sur* $]-1, 1[$.

Par conséquent f est strictement croissante $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-1,1[$ avec $f(-1)=2$ et $f(1)=-2$ qui sont respectivement un maximum et un minimum locaux (fonction impaire).

De plus, pour $x\neq 0$, $f(x)=x^3(1-3/x^2)$ donc $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ (fonction impaire).

Enfin, $f(2)=2$ et $f(3)=18$.

2. *D'après la question 1, g est continue et strictement croissante. D'après le cours, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, de plus si elle est strictement croissante, l'intervalle image est de même nature, enfin les bornes de $g([1,+\infty[)$ sont $g(1)=-2$ et $\lim\limits_{+\infty} g=+\infty$.*

   On en conclut que $g([1,+\infty[)=[-2,+\infty[$.

3. *Une fonction strictement monotone est injective donc g est injective. g est surjective de $[1,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$ car $g([1,+\infty[)=[-2,+\infty[$. On en conclut que g est bijective de $[1,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$.*

   Enfin, la réciproque d'une fonction strictement croissante et continue est elle-même strictement croissante et continue d'où le résultat pour g^{-1}.

4. *D'après le cours, comme g est strictement monotone et dérivable, g^{-1} est dérivable pour tout x tel que $g'\big(g^{-1}(x)\big)$ est non nulle. Or g' est non nulle sauf en $1=g^{-1}(-2)$ donc g^{-1} est dérivable sur $]-2,+\infty[$.*

   En 1, g admet une dérivée nulle donc une tangente horizontale, par conséquent en $-2=g(1)$, g^{-1} n'est pas dérivable mais admet une tangente verticale.

5. *Pour tout $x\in]-2,+\infty[$, $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)}$.*

   D'après la question 1, $g(2)=2$ donc $g^{-1}(2)=2$, et $g'(2)=9$ donc $(g^{-1})'(2)=\frac{1}{9}$.

   De même, $g(3)=18$ donc $g^{-1}(18)=3$, et $g'(3)=24$ donc $(g^{-1})'(18)=\frac{1}{24}$.

Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=4-\ln x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

NB : on rappelle que $2<e<3$.

1. Montrer que : $1\leqslant \ln 4\leqslant 2$. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$: $2\leqslant u_n\leqslant 4$.
2. Montrer que l'équation $x+\ln x=4$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ que l'on notera α. Encadrer α par deux entiers consécutifs.
3. En utilisant les encadrements précédents pour appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f, établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$|u_{n+1}-\alpha|\leqslant |u_n-\alpha|/2.$$
4. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\alpha|\leqslant 2^{-n}$. Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déterminer le signe de $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?

Correction :

1. *Comme la fonction $\ln$ est croissante, on a d'une part $e\leqslant 4 \Rightarrow 1=\ln e\leqslant \ln 4$, d'autre part $2\leqslant e \Rightarrow \ln 2\leqslant 1 \Rightarrow \ln 4=2\ln 2\leqslant 2$.*

   On en conclut que $1\leqslant \ln 4\leqslant 2$.

Puis on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
Pour $n = 0$, on a bien $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant 4$.
Supposons $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ pour un entier $n \geqslant 0$ quelconque. Alors $u_{n+1} = f(u_n) = 4 - \ln u_n$.
Comme $\ln$ est croissante, l'hypothèse $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ implique $\ln 2 \leqslant \ln u_n \leqslant \ln 4$ donc
$4 - \ln 4 \leqslant 4 - \ln u_n \leqslant 4 - \ln 2$.

On en conclut que $2 \leqslant u_{n+1} = 4 - \ln u_n \leqslant 4$ car, d'une part $2 \leqslant 4 - \ln 4$ ($\ln 4 \leqslant 2$ démontré précédemment), d'autre part $4 - \ln 2 \leqslant 4$ ($\ln 2$ est positif).

2. *Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \ln x$.*
g est continue et $\lim\limits_{0+} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 4$ admet au moins une solution dans $]0, +\infty[$.

   De plus, g est la somme de deux fonctions strictement croissantes, l'identité et le logarithme népérien, donc g est strictement croissante. On en déduit que g est injective et que par conséquent l'équation $g(x) = 4$ admet une solution unique α.

   Enfin, on peut encadrer α par les entiers 2 et 3. En effet, $g(2) = 2 + \ln 2 \leqslant 4$ car $\ln 2 \leqslant 2$ et $g(3) = 3 + \ln 3 \geqslant 4$ car $3 \geqslant e \Rightarrow \ln 3 \geqslant 1$.

3. *α vérifie $\alpha + \ln \alpha = 4$ donc $f(\alpha) = \alpha$. L'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|/2$ s'écrit donc également $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ sachant que pour tout n, u_n et α sont dans $[2, 4]$.*
On reconnait un résultat que l'on peut obtenir par l'inégalité des accroissements finis à condition de montrer que $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $]2, 4[$.
Or pour tout $x \in]2, 4[$, $f'(x) = \frac{1}{x} \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ d'où $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout n, $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ entre u_n et α donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

4. *On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$.*
Pour $n = 0$, comme $u_0 = 2$, on a bien donc $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$ car $\alpha \in [2, 3]$.
Soit $n \geqslant 0$ quelconque. Supposons l'inégalité vraie pour n, alors d'après la question précédente : $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |u_n - \alpha|/2 \leqslant 2^{-n}/2 = 2^{-(n+1)}$. On a donc aussi l'inégalité au rang $n + 1$.

   Comme $\lim 2^{-n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim |u_n - \alpha| = 0$ donc $\lim u_n = \alpha$.

5. *La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.*
On en déduit que $u_n - \alpha$ et $f(u_n) - f(\alpha) = u_{n+1} - \alpha$ sont de signes contraires.
Cela signifie que u_n et u_{n+1} sont de part et d'autre de α. On peut même préciser que pour tout n pair, $u_n < \alpha$ et pour tout n impair, $u_n > \alpha$ car $u_0 = 2 < \alpha$.
On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante.