Examen du 8 janvier 2010

Sujet de la section B (cours par T. Joly, TD par F. Kassel, T. Lagache, E. Leducq, M. Rempel et E. Sumano)
Durée : 3 heures. Les documents, téléphones mobiles et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. *Questions de cours*

1. 1) Énoncer le théorème de Rolle.

1. 2) Calculer les dérivées partielles $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par : $f(x,y)=y^x$.

Exercice 2.
On note $P(x)=x^6-1$ et $Q(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$.

2. 1) Effectuer la division euclidienne de P par Q.

2. 2) Factoriser le polynôme Q dans $\mathbb{C}$ (en particulier, on donnera ses racines dans $\mathbb{C}$).

Exercice 3.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces F et G tels que

- $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0 \text{ et } 3x-y-z=0\}$.
- G est engendré par le système de vecteurs (v_1,v_2,v_3), où $v_1=(1,-1,2)$, $v_2=(4,-1,3)$ et $v_3=(1,2,-3)$.

3. 1) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.

3. 2) Montrer que G est défini par l'équation $x-5y-3z=0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $x-5y-3z=0$.)

3. 3) Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G ; en déduire la dimension de G.

3. 4) Soit $\mathcal{F}$ le système de vecteurs obtenu en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas un système libre.

3. 5) A l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est un système générateur de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right) \qquad \lim_{x\to 0}\,(x^2+x)\ln(x^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\cos x\,\arctan x\right) \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$$

Exercice 5.
On considère la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

5. 1) Étudier les variations de f (en justifiant ce que vous écrivez). Calculer les valeurs prises par f en 1, 2 et 3. Dessiner son graphe.

5. 2) On note g la restriction de f à $[1,+\infty[$. Montrer que $g([1,+\infty[)$ est un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, où α est un réel que l'on précisera. Montrer que g est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[\alpha,+\infty[$ et que l'application réciproque $g^{-1}:[\alpha,+\infty[\longrightarrow[1,+\infty[$ est continue.

5. 3) Montrer que l'application g^{-1} est dérivable sur $]\alpha,+\infty[$. Est-elle dérivable en α ?

5. 4) Déterminer les valeurs de la dérivée de g^{-1} en 2 et en 18.

Exercice 6.
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=4-\ln x$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

N.B. On rappelle que $2<e<3$.

6. 1) Montrer que : $1\leqslant\ln 4\leqslant 2$. En déduire pour tout $n\geqslant 1$: $2\leqslant u_n\leqslant 4$.

6. 2) Montrer que l'équation $x+\ln x=4$ a une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ que l'on notera α. Encadrer α par deux entiers consécutifs.

6. 3) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f, établir l'inégalité : $|u_{n+1}-\alpha|\leqslant|u_n-\alpha|/2$. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_n-\alpha|\leqslant 2^{-n}$. Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. 4) Déterminer le signe de $\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
