Corrigé de l'examen du 8 janvier 2010

Exercice 1 *Questions de cours*

1.1) Énoncé du théorème de Rolle : Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe un réel $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

1.2) *Hors programme à l'examen du 7 janvier 2011* : Les dérivées partielles de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par $f(x,y)=y^x$ sont définies sur le même ensemble $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^x \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy^{x-1}.$$

Exercice 2

2.1) Division euclidienne de $P(x)=x^6-1$ par $Q(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^6 & & & & & & -1 & x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \\ \hline
- & x^6 & +x^5 & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & & x-1 \\ \hline
 & & -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\
- & & -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\ \hline
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit : $P(x)=(x-1)\,Q(x)$.

2.2) Les racines de $P(x)=x^6-1$ sont les racines $6^{\text{èmes}}$ de l'unité, à savoir les 6 nombres complexes : $e^{i\frac{2k\pi}{6}} = e^{i\frac{k\pi}{3}}$ $(0 \leqslant k \leqslant 5)$, et donc :

$$P(x) = \prod_{k=0}^{5}\left(x - e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) = (x-1)\prod_{k=1}^{5}\left(x - e^{i\frac{k\pi}{3}}\right).$$

Comme $P(x)=(x-1)\,Q(x)$, on a par identification :

$$Q(x) = \prod_{k=1}^{5}\left(x - e^{i\frac{k\pi}{3}}\right).$$

Les racines de $Q(x)$ sont ainsi les racines $6^{\text{èmes}}$ de l'unité autres que 1.

Exercice 3

3.1) Les vecteurs de F sont les vecteurs $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dont les composantes x,y,z sont solutions du système :

$$\left[\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z = 0 & (E_1) \\ 3x & -y & -z = 0 & (E_2) \end{array}\right.$$

qui se laisse échelonner en une seule étape par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left[\begin{array}{rrrl} x & +2y & +z = 0 & (E_1) \\ & -7y & -4z = 0 & (E_2 - 3E_1)\,. \end{array}\right.$$

Ce système équivaut encore à :

$$\left[\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ \quad y=-\frac{4}{7}z \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{7}z=0 \\ \quad y=-\frac{4}{7}z \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{7}z \\ y=-\frac{4}{7}z \\ z=z \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}z \\ -\frac{4}{7}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs de F sont exactement les combinaisons linéaires de l'unique vecteur $u_1 = (1, -4, 7)$. Ce vecteur u_1 constitue donc à lui seul une base de F : on peut choisir $\mathcal{B}_1 = (u_1)$, d'où : $\dim F = 1$.

3.2) Les vecteurs de G sont par définition les combinaisons linéaires de v_1, v_2, v_3. On en déduit qu'un vecteur quelconque (x, y, z) appartient à G si et seulement si il existe des réels a, b, c tels que :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

autrement dit, si et seulement si le système (S) suivant possède (au moins) une solution (a, b, c) :

$$\left[\begin{array}{rrrl} a & +4b & +c & = x \\ -a & -b & +2c & = y \\ 2a & +3b & -3c & = z \end{array}\right. \quad (S)$$

Échelonnons ce système (S) selon la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \iff \left[\begin{array}{rrrll} a & +4b & +c & = x & (E_1) \\ & 3b & +3c & = y+x & (E_2+E_1) \\ & -5b & -5c & = z-2x & (E_3-2E_1) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rrrll} a & +4b & +c & = x & (E_1) \\ & 3b & +3c & = y+x & (E_2) \\ & & 0 & = -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+z & (E_3+\frac{5}{3}E_2). \end{array}\right.$$

Le dernier système admet une solution (a, b, c) si et seulement si $0 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y + z$ (car on peut alors choisir librement c, puis déterminer a, b à l'aide des deux premières équations). Ainsi, on a : $(x, y, z) \in G$ si et seulement si $-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+z = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $-3(-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+z) = x-5y-3z = 0$,

3.3) Selon la question précédente, les vecteurs de G sont les vecteurs (x, y, z) tels que : $x - 5y - 3z = 0$. Cette unique équation est un système échelonné que l'on résoud de la façon habituelle :

$$x-5y-3z=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=5y+3z \\ y=y \\ z=z \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y+3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs de G sont exactement les combinaisons linéaires de $u_2 = (5, 1, 0)$ et $u_3 = (3, 0, 1)$. (u_2, u_3) est donc une famille génératrice de G. Comme de plus, (u_2, u_3) est une famille libre (car u_2 et u_3 ne sont pas colinéaires), il s'agit d'une base de G. On peut donc choisir $\mathcal{B}_2 = (u_2, u_3)$ et on en déduit : $\dim G = 2$.

3.4) La famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ n'est pas libre s'il existe des réels a, b, c tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ bien que a, b, c *ne soient pas tous nuls*. L'égalité vectorielle $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ se laisse exprimer par :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5b+3c \\ -4a+b \\ 7a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore par le système suivant, que l'on échelonne par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left[\begin{array}{rrrl} a & +5b & +3c & = 0 \\ -4a & +b & & = 0 \\ 7a & & +c & = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rrrll} a & +5b & +3c & = 0 & (E_1) \\ & 21b & +12c & = 0 & (E_2+4E_1) \\ & -35b & -20c & = 0 & (E_3-7E_1) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rrrll} a & +5b & +3c & = 0 & (E_1) \\ & 7b & +4c & = 0 & (E_2/3) \\ & 7b & +4c & = 0 & (E_3/(-5)) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rrrl} a & +5b & +3c & = 0 \\ & 7b & +4c & = 0 \end{array}\right.$$

Le système échelonné obtenu a des solutions non nulles, puisque le paramètre c peut y être choisi librement : par exemple, $c = -7$ d'où : $b = 4$ et $a = -5b - 3c = 1$. On a ainsi : $u_1 + 4u_2 - 7u_3 = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ n'est pas libre.

3.5) Selon un théorème du cours, *dans un espace vectoriel E de dimension n, une famille génératrice de E constituée de n vecteurs est une base de E*. Si $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ était une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, il s'agirait d'une base de $\mathbb{R}^3$, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, et donc d'une famille libre, contrairement à ce que l'on a établi à la question précédente. On en déduit que $\mathcal{F}$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

- Pour tout $x > 0$, on a :

$$\sqrt{x^2+x+2}-x = \frac{(x^2+x+2)-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1},$$

or $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+2}-x = \dfrac{1}{2}\cdot$

- Pour $x > 0$, on a : $(x^2+x)\ln(x^2) = 2(x+1)\,.\,x\ln x$, or $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)\ln(x^2) = 0$.

Pour $x < 0$, on a : $(x^2+x)\ln(x^2) = -2(x+1)\,.\,|x|\ln|x|$, et comme $\lim\limits_{x\to 0^-}|x|\ln|x| = 0$, on en déduit : $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x)\ln(x^2) = 0$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x)\ln(x^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)\ln(x^2) = 0$, on peut conclure : $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\ln(x^2) = 0$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|e^{-\sqrt{\ln x}}\cos x \arctan x\right| = e^{-\sqrt{\ln x}}\,|\cos x|.|\arctan x| \leqslant e^{-\sqrt{\ln x}}\,.\,1\,.\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\,e^{-\sqrt{\ln x}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} = 0$, donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{\ln x}}\cos x \arctan x\right) = 0$.

- Lorsque x tend vers 2, x^3-x^2-x-2 et $x^3-6x^2+12x-8$ tendent vers 0, et nous sommes devant un cas d'indétermination du type 0/0. Mais comme x^3-x^2-x-2 et $x^3-6x^2+12x-8$ sont des polynômes, nous pouvons facilement lever cette indétermination en les écrivant chacun sous la forme : $(x-2)^m Q(x)$, où m est la multiplicité de la racine 2. À l'aide de divisions euclidiennes, on trouve : $x^3-x^2-x-2 = (x-2)(x^2+x+1)$ et $x^3-6x^2+12x-8 = (x-2)^3$. Ainsi,

$$\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)^3} = \frac{x^2+x+1}{(x-2)^2} \xrightarrow[x\to 2]{} +\infty$$

car $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1) = 7$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2 = 0^+$. On en déduit : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-6x^2+12x-8} = +\infty$.

Exercice 5

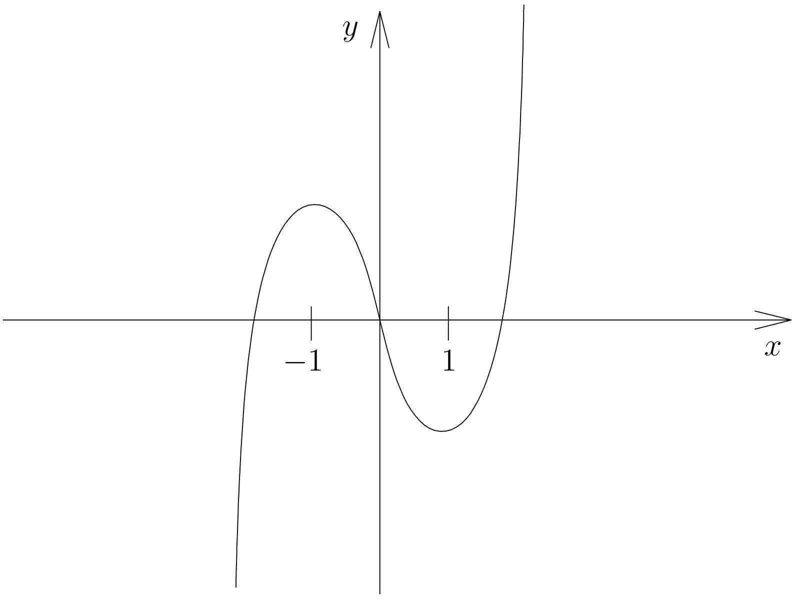
5.1) La fonction f a pour dérivée sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$. On en déduit les variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^3(1-3/x^2)$, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par le calcul, on trouve : $f(-1) = -1+3 = 2$, $f(1) = 1-3 = -2$, $f(2) = 8-6 = 2$, $f(3) = 27-9 = 18$.

Enfin, le graphe de la fonction f est :



5.2) La restriction g de f à $[1, +\infty[$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, donc *continue sur* $[1, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a : $g'(x) = f'(x) > 0$, donc g est *strictement croissante sur* $[1, +\infty[$.

En vertu du Théorème des Bijections Bicontinues, ces propriétés de continuité et de stricte monotonie de g permettent de conclure que :

- g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[)$,
- $g([1, +\infty[)$ est l'intervalle $\left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-2, +\infty[$ (donc $\alpha = -2$),
- La bijection réciproque $g^{-1} : [-2, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est continue sur $[-2, +\infty[$.

5.3) Comme on a de plus pour tout $x \in]1, +\infty[$: $g'(x) \neq 0$, la bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur $]-2, +\infty[$. En revanche, $g'(1) = 0$ donc g^{-1} n'est pas dérivable en $\alpha = g(1) = 2$.

5.4) Pour tout $y \in]-2, +\infty[$, $1 = (g(g^{-1}(y)))' = g'(g^{-1}(y)).(g^{-1})'(y)$ et donc $(g^{-1})'(y) = 1/g'(g^{-1}(y))$. En remplaçant y par $2 = g(2)$ dans cette dernière relation, on obtient : $(g^{-1})'(2) = 1/g'(2) = 1/9$. De même, en faisant $y = 18 = g(3)$, on obtient : $(g^{-1})'(18) = 1/g'(3) = 1/24$.

Exercice 6

6.1) Puisque $2 < e < 3$ et que la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$, on a $\ln 4 \geqslant \ln e = 1$ et $\ln 4 = 2 \ln 2 \leqslant 2 \ln e = 2$, d'où l'encadrement : $1 \leqslant \ln 4 \leqslant 2$.

Montrons que l'on a : $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ par récurrence sur n.

Initialisation. L'encadrement $2 \leqslant u_0 \leqslant 4$ est vérifié, car $u_0 = 2$.

Hérédité. Supposons que : $2 \leqslant u_n \leqslant 4$. Il s'ensuit $0 \leqslant \ln 2 \leqslant \ln u_n \leqslant \ln 4 \leqslant 2$, donc $-2 \leqslant -\ln u_n \leqslant 0$ et $2 \leqslant 4 - \ln u_n \leqslant 4$, c'est-à-dire $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

Ainsi, on a bien $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.2) La fonction $h(x) = x + \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc *continue sur* $]0, +\infty[$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $h'(x) = 1 + 1/x > 0$, donc h est *strictement croissante sur* $[1, +\infty[$. Le Théorème des Bijections Bicontinues permet d'en déduire que h est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\left]\lim_{x\to0^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. En particulier, le réel 4 a un unique antécédent par h, autrement dit l'équation $x + \ln x = 4$ a une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

Puisque $2 < e < 3$, on a : $h(2) = 2 + \ln 2 < 2 + \ln e = 3 < 4$ et $h(3) = 3 + \ln 3 > 3 + \ln e = 4$. Ainsi, $h(2) < h(\alpha) < h(3)$. Comme la fonction h est strictement croissante, cela entraîne : $2 < \alpha < 3$.

6.3) Remarquons que puisque $\alpha + \ln \alpha = 4$, on a $f(\alpha) = \alpha$. Puisque la fonction f est dérivable (et donc continue) sur $]0, +\infty[$, le Théorème des Accroissements Finis entraîne pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un réel c entre u_n et α tel que : $f(u_n) - f(\alpha) = f'(c).(u_n - \alpha)$. Or les réels u_n et α appartiennent à l'intervalle $[2,4]$, d'après les questions 6.1 et 6.2 respectivement, donc le réel c, lui-même entre u_n et α, appartient aussi à l'intervalle $[2,4]$. Il s'ensuit : $|f'(c)| = |-1/c| = 1/c \leqslant 1/2$ et finalement :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)|.|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Montrons $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$ par récurrence sur n.

Initialisation. À la question 6.2, nous avons trouvé que $2 < \alpha < 3$, donc $|u_0 - \alpha| = \alpha - 2 \leqslant 1 = 2^{-0}$.

Hérédité. Supposons que : $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$. On a alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\, 2^{-n} = 2^{-(n+1)}.$$

Ainsi, on a bien $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$, l'inégalité $|u_n - \alpha| \leqslant 2^{-n}$ entraîne par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

6.4) À la question précédente, nous avons établi à l'aide du Théorème des Accroissements Finis l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un réel c entre u_n et α tel que : $\dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = f'(c)$. Or nécessairement : $f'(c) = -1/c < 0$, donc

$$\frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} < 0.$$

Il s'ensuit que la grandeur $u_n - \alpha$ change de signe à chaque rang : si $u_n > \alpha$ alors $u_{n+1} < \alpha$ et si $u_n < \alpha$ alors $u_{n+1} > \alpha$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante, mais alterne autour de la valeur α.