Université de Paris **2019-2020**
MI2

L1 Info - Partiel de mathématiques - 7 mars 2020 - 8h30-11h30

Calculatrices interdites - Cartables en bas de l'amphi

Exercice 1. On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$.

1. Justifier que 1 est racine double du polynôme P.
2. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^2 - (3+4i)X - 1 + 5i = 0$.
2. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme
$$Q(X) = X^3 - (4+4i)X^2 + (2+9i)X + 1 - 5i$$
sachant que l'une de ses racines est une racine réelle évidente.

Exercice 3.
Soient $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Placer les points M_1, M_2, M_1' et M_2' d'affixes respectives z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ dans le plan complexe.
2. Calculer Z sous forme algébrique.
3. Mettre z_1, z_2 et Z sous forme exponentielle ou trigonométrique.
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule d'Euler qui permet d'exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de $\exp(i\theta)$ et $\exp(-i\theta)$.
2. En déduire la linéarisation de $\sin^3(\theta)$.

Exercice 5.
Déterminer le reste de la division par 11 de 1996^{1996}.

Exercice 6.
On pourra traiter des questions en admettant les résultats des questions préliminaires. Toute trace de recherche cohérente sera valorisée.

Partie 1 :

1. Montrer que le polynôme $X^7 - X$ s'écrit $(X-1)X(X+1)Q(X)$ où Q est un polynôme de degré 4 qu'on ne cherchera pas à identifier.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^7 - n$ est divisible par 2 et par 3.

Partie 2 :
On rappelle la définition du coefficient binomial : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$,
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2}.$$
On considère p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $0 < k < p$ on a p qui divise C_p^k (on énoncera et on utilisera le lemme de Gauss).
2. En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $(a + b)^p$ est congru à $a^p + b^p$ modulo p.
3. En déduire par récurrence sur n que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $n^p - n$ congru à 0 modulo p .

Partie 3 :
Application numérique : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $n^7 - n$ puis que 42 divise $n^7 - n$ (on utilisera ici la première partie).