# Partiel

## 7 mars 2020

*Corrigé*

**Exercice 1.**

1. On calcule les polynômes $P'(X)$ et $P''(X)$ :

$$P'(X) = 4X^3 - 9X^2 - 6X + 11$$

$$P''(X) = 12X^2 - 18X - 6$$

On remarque que $P(1) = 1 - 3 - 3 + 11 - 6 = 0$, que $P'(1) = 4 - 9 - 6 + 11 = 0$ et que $P''(1) = 12 - 18 - 6 = -12 \neq 0$. Le nombre 1 est donc bien une racine double de $P$.
*Remarque :* pour répondre à la question, on aurait aussi pu remarquer (en effectuant les divisions euclidiennes par exemple) que $(X-1)^2$ divise $P$, et que $(X-1)^3$ ne divise pas $P$.

2. On divise $P$ par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
X^4 & -3X^3 & -3X^2 & +11X & -6 & X^2 & -2X & +1 \\
\cline{6-8}
-X^4 & +2X^3 & -X^2 & & & X^2 & -X & -6 \\
\cline{1-3}
 & -X^3 & -4X^2 & +11X & -6 & & & \\
 & +X^3 & -2X^2 & +X & & & & \\
\cline{2-4}
 & & -6X^2 & +12X & -6 & & & \\
 & & +6X^2 & -12X & +6 & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Ainsi, $P(X) = (X-1)^2(X^2 - X - 6)$. Le discriminant de $X^2 - X - 6$ est $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$. Ce dernier polynôme est donc réductible sur $\mathbb{R}$. Ses racines sont $\dfrac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1}$, c'est-à-dire 3 et $-2$. Finalement, on a la factorisation suivante de $P$ : $P(X) = (X-1)^2(X-3)(X+2)$.

**Exercice 2.**

1. Le discriminant du polynôme est $(-(3+4i))^2 - 4 \times 1 \times (-1+5i) = 9 - 16 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i$. Pour trouver les racines, il nous faut trouver une racine carrée de $-3 + 4i$. On cherche cette racine carrée sous la forme $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ des nombres réels. On souhaite que $z^2 = -3 + 4i$, donc que $a^2 - b^2 + i \times 2ab = -3 + 4i$. De plus, $|z|^2 = a^2 + b^2$ doit être égal à $|-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Nous n'avons donc plus qu'à résoudre le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 &= 5 \\ a^2 - b^2 &= -3 \\ 2ab &= 4 \end{cases}$$

La somme des deux premières lignes donne $2a^2 = 2$, soit $a = \pm 1$. La différence des deux premières lignes donne $2b^2 = 8$, soit $b = \pm 2$. La dernière ligne impose que $a$ et $b$ soient de même signe, donc les deux racines carrées de $-3 + 4i$ sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$. Les deux solutions de $X^2 - (3+4i)X - 1 + 5i = 0$ sont donc $\dfrac{3 + 4i + 1 + 2i}{2} = 2 + 3i$, et $\dfrac{3 + 4i - 1 - 2i}{2} = 1 + i$.

2. On remarque que $Q(1) = 0$, et que $Q(X) = (X-1)(X^2 - (3+4i)X - 1 + 5i)$ (à l'aide d'une division euclidienne par exemple). La question précédente nous permet d'affirmer que $Q(X) = (X-1)(X-(1+i))(X-(2+3i))$.

**Exercice 3.**

1. Pour placer $M_1$ il suffit de placer le point de coordonnées cartésiennes $(-1;1)$. Le point $M_1'$ est le symétrique de $M_1$ par rapport à l'axe des réels, c'est le point de coordonnées cartésiennes $(-1;-1)$. Pour placer $M_2$, le mieux est de répondre d'abord à la question 3 car une fois mis sous forme trigonométrique, on sait que $\overrightarrow{OM_2}$ fait un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec la demi-droite des réels positifs, et que $OM = 2$. De même, $M_2'$ est le symétrique de $M_2$ par rapport à l'axe des réels.
2. $$\begin{aligned} Z &= \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2} \\ &= \frac{-1-i^2\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}}{4}) \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$
3. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$, et $z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

   De même, $|z_2| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$, et $z_2 = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

   On en déduit que $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que

   $\arg(Z) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi} \equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi} \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

   Ainsi, $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.
4. En comparant les écritures algébriques et trigonométriques de $Z$, on identifie

   $$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

   De même, on obtient

   $$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

   Enfin,

   $$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

   et

   $$\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

**Exercice 4.**

1. $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

2. On utilise la binôme de Newton et la formule de Moivre.

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3}{8i^3} \\
&= \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

**Exercice 5.**

On calcule 1996 modulo 11 : $1996 = 181 \times 11 + 5$, donc $1996^{1996} \equiv 5^{1996} \pmod{11}$. Par ailleurs, $5^2 \equiv 3 \pmod{11}$, $5^3 \equiv 15 \pmod{11} \equiv 4 \pmod{11}$, $5^4 \equiv 20 \pmod{11} \equiv -2 \pmod{11}$ et $5^5 \equiv -10 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$. De la relation $1996 = 399 \times 5 + 1$, on déduit que

$$\begin{aligned}
1996^{1996} &\equiv 5^{1996} \pmod{11} \\
&\equiv (5^5)^{399} \times 5 \pmod{11} \\
&\equiv 1^{399} \times 5 \pmod{11} \\
&\equiv 5 \pmod{11}
\end{aligned}$$

On en conclut que le reste cherché est 5.

**Exercice 6.**

**Partie 1 :**

1. Notons $P(X) = X^7 - X$. les nombres 0, 1 et $-1$ sont des racines de $P$. Le polynôme $P$ est donc divisible par chacun des polynômes irréductibles $X$, $X-1$ et $X+1$, et donc par leur produit. Le polynôme $P$ s'écrit donc bien sous la forme voulue. Le degré de $P$ valant 7, et le degré de $(X-1)X(X+1)Q(X)$ valant $1+1+1+\deg Q$, on doit bien avoir $\deg Q = 4$.
2. Soit $n$ un entier naturel. Alors $n^7 - n = Q(n) = (n-1)n(n+1)Q(n)$. Quelque soit l'entier $n$, le produit $n(n+1)$ est pair. On en déduit que $n^7 - n$ est divisible par 2. Par ailleurs, quelque soit $n$, le produit $(n-1)n(n+1)$ est un multiple de 3. En effet, parmi les trois entiers consécutifs $n-1, n$ et $n+1$, l'un d'entre eux est un multiple de 3. On en déduit que $n^7 - n$ est divisible par 3.

**Partie 2 :**

1. On rappelle le lemme de Gauss : si $a, b, c$ sont des entiers tels que $a|bc$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ alors $a|c$. En particulier, si $a$ est un nombre premier et que $a$ ne divise pas $b$, alors $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ et $a|c$.

   On sait que les $C_p^k$ sont des nombres entiers. $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$. Donc $k!(p-k)!C_p^k = p!$

   Puisque $p! = p \times (p-1)!$, le nombre premier $p$ doit diviser le produit $k!(p-k)!C_p^k$. Or, comme $0 < k < p$, la décomposition en facteurs premiers de $k!(p-k)!$ ne fait intervenir que des nombres premiers strictement inférieurs à $p$, puisque chaque facteur utilisé dans la définition des factorielles est strictement inférieur à $p$. On en déduit que $k!(p-k)!$ n'est pas divisible par $p$. D'après le lemme de Gauss, $p$ doit diviser $C_p^k$.
2. D'après la question précédente, tous les coefficients binomiaux $C_p^k$ avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$ sont nuls modulo $p$. Soient $a$ et $b$ des entiers.

$$(a+b)^p \equiv b^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k b^{p-k} + a^p \pmod{p} \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

3. Initialisation : pour $n = 0$, c'est évident : 0 est congru à 0 modulo $p$.
   Hérédité : On suppose que pour un certain entier $n$, $n^p - n$ est congru à 0 modulo $p$. Alors $(n+1)^p - (n+1) \equiv n^p + 1^p - n - 1 \pmod{p}$ d'après la question précédente. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $(n+1)^p - (n+1) \equiv n^p - n + 1 - 1 \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$.

**Partie 3 :**

D'après la partie 2, quelque soit $n$ entier naturel, $n^7 - n$ est congru à 0 modulo 7, ou, autrement dit, $n^7 - n$ est divisible par 7.

D'après la partie 1, $n^7 - n$ est divisible par 2 et par 3. Comme 2, 3 et 7 sont deux à deux premiers entre eux, la décomposition en produit de facteurs premiers de $n^7 - n$ contient donc au moins le produit $2 \times 3 \times 7$, et $n^7 - n$ est divisible par 42.