Université de Paris **2019-2020**
MI2

Devoir Maison Mai 2020 - compte 50 % du CC

Document à faire sur une plage de 24h. A l'issue de la plage - et immédiatement après - vous devez scanner, photographier - adresse mail pour le renvoie vandebro@univ-paris-diderot.fr - ou poster votre production - pour l'adresse postale, me demander par mail

Exercice 1. Soit $\alpha \in [0,1]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ donnée par

$$u_0 = \alpha \ ; \qquad \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}.$$

Partie 1

1) Dresser les tableaux des 6 premières valeurs numériques de la suite dans les cas où $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$ et $\alpha = 0,9$.
2) Conjecturer les variations, les convergences éventuelles et les valeurs possibles de la limite de la suite en fonction du paramètre $\alpha \in [0,1]$.

Partie 2

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1]$.
2) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ la suite (u_n) est convergente.
3) Donner la valeur de la limite selon les valeurs de $\alpha \in [0,1]$.
4) Que se passe-t-il si α n'est pas dans l'intervalle $[0,1]$? (question complémentaire hors barême)

Exercice 2. Déterminer les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 18 et la somme est 360. De même avec les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 18 et le produit est 6480.

Exercice 3. Déterminer par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 18480 et 9828 En déduire un écriture de 84 comme combinaison linéaire à coefficients entiers de 18480 et 9828.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $955x + 183y = 2$.

Exercice 5. Trouver le reste de 100^{1000} dans la division euclidienne par 13.

Exercice 6. Mettre sous forme algébrique $a + ib$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{5+2i}{1-2i} \qquad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

Exercice 7. Calculer le module et l'argument des nombres $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice 8. Donner la linéarisation de $\sin^5(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Comment choisir l'entier n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un imaginaire pur ? soit un réel ?

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ et $z^3 + 3z - 2i = 0$ (on remarquera pour la deuxième que $z = i$ est une racine évidente).

Exercice 11. Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $z^2-(2+im)z-(1+im) = 0$ admette deux racines imaginaires pures conjuguées ?

Exercice 12. (**) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$ on a

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = z^n - 1$$

En déduire que si $z \neq 1$ on a

$$1+z+z^2+\cdots z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(ix) - 1 = 2i\exp(i\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + \cdots + \exp(i(n-1)x)$$

En déduire les valeurs de $X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos((n-1)x)$ et de $Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin((n-1)x)$.

Exercice 13. Calculer le déterminant et déterminer l'inverse (si c'est possible) des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

(pour la dernière on discutera suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 14. (**) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$
2) Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) A est-elle inversible ?

Exercice 15. (*) Soit m un nombre réel.

1) Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m^2-3 & 2 \end{pmatrix}$ selon les valeurs de m.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système

$$\begin{cases} x + y + z = 156 \\ 2x + my + z = 872 \\ x + (m^2-3)y + 2z = -421 \end{cases}$$

admet-il une solution unique ?
3) Calculer le déterminant de M^3 dans le cas où $m = 1$.

Exercice 16. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2.$$

On remarquera que $X = 1$ est racine du polynôme et on regardera sa multiplicité.

Exercice 17. 1) Déterminer les paramètres a et b pour que le polynôme

$$P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

soit divisible par $(X-1)^2$.
2) Même question avec $(X+1)^2$.