Devoir Maison du 11 Mai 2020

Ce devoir maison compte dans le contrôle continu du module pour 50% de la note finale de première session. Vous disposez de 24h pour l'effectuer à partir du 11 mai à 8h. Vous avez droit à tout le matériel à votre disposition chez vous. Toute production doit être individuelle. Les copies seront comparées entre elles. Vous déposerez votre production scannée ou photographiée sur le moodle dans la rubrique correspondante à ce devoir, avant le mardi 12 mai 8h. Si vous disposez d'un éditeur de texte qui permet les formules mathématiques vous pouvez également l'utiliser. Si vous avez une question ou des soucis de tout ordre vous pouvez envoyer un mail à vandebro@univ-paris-diderot.fr avec comme sujet "Devoir maison L1 info MI2". Je répondrai aussi vite que possible

Exercice 1. Pendant le confinement a circulé sur les réseaux sociaux cette blague :

Choisissez un chiffre de 1 à 9.

Multipliez le par 3.

Ajoutez 3.

Multipliez encore par 3.

Faites la somme des 2 chiffres de ce résultat il correspondra a votre destination pour les vacances.

Bonne chance.

1. Paris
2. Maldives
3. New-York
4. Caraïbes
5. Grèce
6. La Californie
7. Mexique
8. Singapour
9. à la maison
10. Thaïlande
11. Inde
12. Afrique du sud
13. Australie.
14. Floride
15. Brésil
16. Portugal
17. Canaries
18. Ibiza

Le résultat est toujours "9. à la maison". Expliquer pourquoi, par une preuve mathéma-

tique utilisant vos connaissances du cours d'arithmétique. La qualité de la preuve sera évaluée.

- Exercice 2.** 1. Citer deux méthodes de calculs possibles pour trouver le PGCD(1544, 362).
 2. Mettre en oeuvre l'une de ces méthodes puis trouver $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{PGCD}(1544, 362) = 1544a + 362b$.

- Exercice 3.** 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si d divise n^2 et $2n + 1$ alors d divise n (on écrira n comme combinaison linéaire de n^2 et $2n + 1$).
 2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

- Exercice 4.** 1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $4 + 4i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $4 + 4i\sqrt{3}$.
 2. Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}.$$

3. Placer ces solutions dans le plan complexe (on attend juste un schéma approximatif).

- Exercice 5.** 1. Résoudre $z^5 = 1$ (*) et placer les solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique (ce sont les racines 5^{ième} de l'unité).
 On note $\xi = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$.
 2. Exprimer les solutions de l'équation (*) en fonction de ξ et de ses puissances.
 3. En reconnaissant une somme de suite géométrique, montrer que

$$\sum_{i=0}^4 \xi^i = 0.$$

4. En déduire que les solutions de l'équation (*) sont $z = 1$ et les quatres racines du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
 5. Justifier que $\xi^{-1} = \xi^4$ et $\xi^{-2} = \xi^3$.

On pose $\alpha = \xi + \xi^{-1}$ et $\beta = \xi^2 + \xi^{-2}$.

6. Montrer que α et β sont les racines du polynôme $X^2 + X - 1$.
 7. Calculer α et β (on pourra remarquer que $\xi^{-1} = \bar{\xi}$).
 8. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

- Exercice 6.** 1. Calculer le déterminant de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Justifier que M est inversible.
 3. Calculer l'inverse de la matrice M .

4. Justifier que quels que soient les réels a, b, c le système $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 3y + z = b \\ x + 4y - 6z = c \end{cases}$ admet une solution unique.

5. Donner en fonction de a, b, c l'expression de cette solution.

6. Application numérique : donner la solution du système $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y - 6z = 1 \end{cases}$

Exercice 7. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 , A^3 et A^4 .
2. Conjecturer la forme de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer par récurrence le résultat.

Exercice 8. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ ET DANS $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1.$$

On remarquera d'abord que $X = -1$ est racine du polynôme et on étudiera sa multiplicité.

Exercice 9. On considère la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 6$, $U_1 = 4$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+2} = \frac{5}{4}U_{n+1} - \frac{3}{8}U_n$.

- 1) Ecrire U_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire les variations et la convergence de la suite.