

Devoir maison du 11 mai

Corrigé

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq n \leq 9$. Appliquons les opérations successives énoncées : nous obtenons d'abord $3n$, puis $3n + 3$ et enfin $3(3n + 3) = 9n + 9 = 9(n + 1)$ qui est un multiple de 9. Appelons $m = 9(n + 1)$ et s la somme des chiffres de m , qui est le résultat final recherché. Notons au passage que $1 \leq n \leq 9$ implique que $2 \leq n + 1 \leq 10$ et donc $18 \leq 9(n + 1) \leq 90$, l'entier m a bien exactement deux chiffres comme le suggère l'énoncé.

On sait avec le critère de divisibilité par 9 qu'un entier est multiple de 9 si et seulement la somme de ses chiffres est un multiple de 9, s est donc un multiple de 9. Par ailleurs, les inégalités précédentes nous indiquent les valeurs possibles pour m : $m \in \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\}$. Dans tous les cas, la somme des chiffres de m est la même : $s = 9$ (et pas un autre multiple de 9 comme par exemple 18).

Remarque : on voit que l'on aurait pu inclure aussi $n = 0$, mais pas $n = 10$!

Bonus : Critère de divisibilité par 9.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier décomposé en base 10 : $n = \sum_{i=0}^k a_i \times 10^i$, avec $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{N}$ pour tout $0 \leq i \leq k$ (et éventuellement $a_k \neq 0$).

Comme $10 \equiv 1[9]$, alors pour tout $0 \leq i \leq k$, $10^i \equiv 1^i \equiv 1[9]$ et $n \equiv \left(\sum_{i=0}^k a_i \right) [9]$. Ainsi, n est un multiple de 9 ssi

$n \equiv 0[9]$ ssi $\sum_{i=0}^k a_i \equiv 0[9]$ ssi la somme des chiffres de n est un multiple de 9.

Exercice 2.

1. Pour trouver le PGCD de 1544 et 362, on peut par exemple utiliser l'algorithme d'Euclide, ou bien utiliser la décomposition en facteurs premiers de ces deux entiers et trouver leur plus grand diviseur commun.
2. Puisque nous devons également trouver les entiers a et b demandés, utilisons l'algorithme d'Euclide étendu.

m	u	v	n	u'	v'	(q)
1544	1	0	362	0	1	4
362	0	1	96	1	-4	3
96	1	-4	74	-3	13	1
74	-3	13	22	4	-17	3
22	4	-17	8	-15	64	2
8	-15	64	6	34	-145	1
6	34	-145	2	-49	209	3
2	-49	209	0	/	/	/

Détaillons le premier calcul : la division euclidienne de 1544 par 362 donne $1544 = 4 \times 362 + 96$. À l'étape suivant, nous avons donc : $m = 362$, $u = 0$, $v = 1$ et $n = 96$, $u' = 1 - 4 \times 0 = 1$, $v' = 0 - 4 \times 1 = -4$.

On continue ensuite avec $362 = 3 \times 96 + 74$ etc.

Conclusion : nous obtenons $\text{PCGD}(1544, 362) = 2$, $a = -49$ et $b = 209$, ce qui donne $-49 \times 1544 + 209 \times 362 = 2$.

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons n comme combinaison linéaire de n^2 et $2n + 1$. On a $n(2n + 1) = 2n^2 + n$, ou encore $n = n \times (2n + 1) - 2 \times n^2$. Ainsi, pour tout $d \in \mathbb{N}$, si d divise n^2 et $2n + 1$, alors d divise toute combinaison linéaire de ces deux entiers, en particulier d divise n , et ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $d \in \mathbb{N}$ un diviseur commun à n^2 et $2n + 1$. Alors d divise n d'après la question 1, d est donc un diviseur commun à n et $2n + 1$.

Comme à la question 1, on peut écrire une combinaison linéaire de n et $2n + 1$: $1 \times (2n + 1) - 2 \times n = 1$. On en déduit que d doit aussi être un diviseur de 1, et comme d est positif, $d = 1$. Le seul diviseur positif commun à n^2 et $2n + 1$ est 1, c'est donc que leur PGCD vaut 1 et que ces deux nombres sont premiers entre eux.

Exercice 4.

1. Notons $w = 4 + 4i\sqrt{3} = 4(1 + i\sqrt{3})$.

$$|w| = |4(1 + i\sqrt{3})| = |4||1 + i\sqrt{3}| = 4\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 4\sqrt{1 + 3} = 8.$$

Soit θ un argument de w ($w \neq 0$). Alors on a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On a donc $\theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $w = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$.

2. Chaque nombre complexe admettant exactement n racines n -ièmes, il y a donc trois solutions à trouver. Une première solution z_0 est donnée par $z_0 = \sqrt[3]{|w|}e^{\frac{i\theta}{3}} = 2e^{\frac{i\pi}{9}}$.

On trouve ensuite l'ensemble des solutions en multipliant par les racines 3-ièmes de l'unité, ce qui donne pour $k = 0, 1, 2$: $z_k = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{9}} \\ z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{9}} e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\pi(\frac{1}{9} + \frac{2}{3})} = 2e^{\frac{7i\pi}{9}} \\ z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{9}} e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{i\pi(\frac{1}{9} + \frac{4}{3})} = 2e^{\frac{13i\pi}{9}} \end{cases}$$

3. Voir la figure suivante (figure 1) :

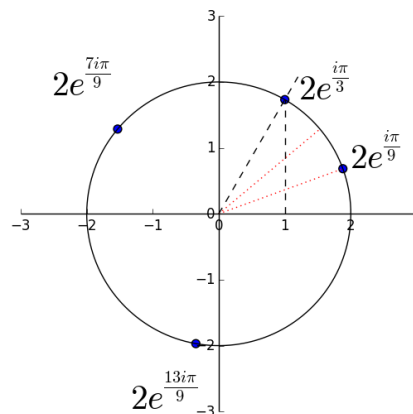


FIGURE 1 – Exercice 4 question 3.

Exercice 5.

1. Les solutions de l'équation $z^5 = 1$ sont les 5 racines 5-ièmes de l'unité : $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right)$. Voir le schéma de la figure 2.

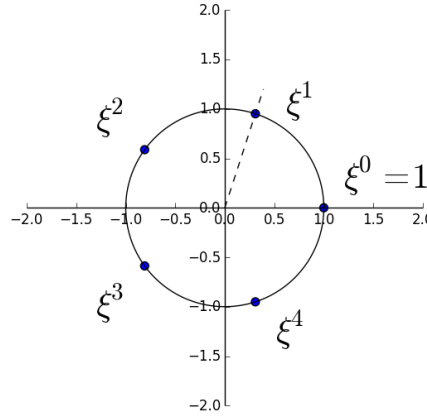


FIGURE 2 – Exercice 5 question 1.

2. On a pour tout $0 \leq k \leq 4$, $z_k = \xi^k$.
3. En reconnaissant la somme des 5 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\xi \neq 1$, on a

$$\sum_{l=0}^4 \xi^l = \frac{1 - \xi^5}{1 - \xi} = \frac{1 - 1}{1 - \xi} = 0$$

car ξ étant une racine 5-ième de l'unité, $\xi^5 = 1$.

4. Les solutions de (*) sont $z_0 = \xi^0 = 1$ et les $z_k = \xi^k$ pour $1 \leq k \leq 4$. Écartons $z_0 = 1$. On a vu à la question précédente que pour $\xi = z_1$, $\sum_{l=0}^4 \xi^l = 0$, c'est-à-dire que ξ est une racine du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

De la même manière, pour $1 \leq k \leq 4$ plus généralement, $\xi^k \neq 1$ et $\sum_{l=0}^4 (\xi^k)^l = \frac{1 - (\xi^k)^5}{1 - \xi^k} = \frac{1 - 1}{1 - \xi^k} = 0$,

puisque $(\xi^k)^5 = z_k^5 = 1$. Ainsi, pour $1 \leq k \leq 4$, z_k est une racine du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, qui compte exactement 4 racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{C}$ (et nous venons de les donner).

En conclusion, les solutions de l'équation (*) sont bien $z = 1$ et les racines du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

5. $\xi^{-1} = (e^{2i\pi/5})^{-1} = e^{-2i\pi/5}$. Comme $-\frac{2\pi}{5} \equiv \frac{8\pi}{5} [2\pi]$, on a bien $\xi^{-1} = e^{8i\pi/5} = e^{4 \times 2i\pi/5} = \xi^4$.

On peut procéder de la même manière pour ξ^2 . Montrons une autre méthode. $\xi^5 = \xi^2 \times \xi^3 = 1$ d'où, en inversant la relation, $\xi^{-2} = \xi^3$.

6. Calculons :

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = (\xi + \xi^{-1})^2 + \xi + \xi^{-1} - 1 = \xi^2 + 2 \underbrace{\xi \xi^{-1}}_1 + \underbrace{\xi^{-2}}_{\xi^3} + \xi + \underbrace{\xi^{-1}}_{\xi^4} - 1 = \xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$$

$$\beta^2 + \beta - 1 = (\xi^2 + \xi^{-2})^2 + \xi^2 + \xi^{-2} - 1 = \xi^4 + 2 \underbrace{\xi^2 \xi^{-2}}_1 + \underbrace{\xi^{-4}}_{\xi^1} + \xi^2 + \underbrace{\xi^{-2}}_{\xi^3} - 1 = \xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$$

En effet, puisque $\xi^{-1} = \xi^4$, on a également $\xi^{-4} = \xi$. De plus, le polynôme $X^2 + X - 1$ admet exactement deux racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{C}$. Les racines de ce polynôme sont donc α et β .

7. Remarquons que $\bar{\xi} = e^{-2i\pi/5} = \xi^{-1}$.

On a donc $\alpha = \xi + \xi^{-1} = \xi + \bar{\xi} = 2\operatorname{Re}(\xi) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Par ailleurs, $\beta = \xi^2 + \xi^{-2} = \xi^2 + (\bar{\xi})^2 = \xi^2 + \bar{\xi}^2 = 2\operatorname{Re}(\xi^2) = 2\operatorname{Re}(e^{2 \times 2i\pi/5}) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

8. Calculons d'une autre manière les racines de $X^2 + X - 1$. Ce polynôme a pour déterminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. Il admet donc bien deux racines réelles données par $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, qui correspondent à α et β . On a d'une part $x_1 < x_2$, et d'autre part $\beta < \alpha$ (en s'appuyant sur la figure 2 par exemple, ou encore par décroissance de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, \pi]$ qui contient $2\pi/5$ et $4\pi/5$). On en déduit donc que $\alpha = x_2$ et $\beta = x_1$, et avec le résultat de la question 7 on a :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{x_2}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{x_1}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Exercice 6.

1. Utilisons par exemple la formule de Sarrus :

$$\det(M) = 1 \times 3 \times (-6) + 2 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 4 - (-1) \times 3 \times 1 - 2 \times 2 \times (-6) - 1 \times 1 \times 4 = -18 + 2 - 8 + 3 + 24 - 4 = -1$$

2. $\det(M) \neq 0$ donc M est inversible.

3.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 + 3L_3]{L_1 \rightarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{L'inverse de } M \text{ est donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & -5 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La matrice M étant inversible, alors

$$\text{quels que soient les réels } a, b \text{ et } c, \text{ ce système admet une unique solution donnée par } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

5. Le calcul matriciel donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & -5 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22a - 8b - 5c \\ -13a + 5b + 3c \\ -5a + 2b + c \end{pmatrix}.$

6. Dans cet exemple, il suffit de remplacer $a = b = c = 1$, ce qui donne $x = 9$, $y = -5$ et $z = -2$.

Exercice 7.

1. Détaillons le calcul pour A^2 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 3 \\ 0 \times 1 - 2 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 0 - 2 \times (-2) + 0 \times 0 & 0 \times 1 - 2 \times 0 + 0 \times 3 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times (-2) + 3 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure, on sait donc que les coefficients en position (2,1), (3,1) et (3,2) sont nuls.

Preuve : Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ deux matrices triangulaires supérieures, c'est-à-dire que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ si $i > j$. Notons $C = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ le produit $C = AB$.

Soient $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i > j$. Montrons que $c_{ij} = 0$.

On a $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{ik}}_{=0} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{=0} = 0$. En effet, pour $1 \leq k \leq i-1$, $i > ki$ et A étant triangulaire supérieure $a_{ik} = 0$. De même, pour $i \leq k \leq n$, puisqu'on a $i > j$ alors $k > j$ et $b_{kj} = 0$.

Pour les puissance suivantes, on calcule

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+12 \\ 0 & -8 & 0+0+0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

et

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

2. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^n-1}{2} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Expliquons d'où vient cette conjecture, notamment le coefficient (1,3), en regardant les opérations successives que nous avons effectuées pour ce coefficient. Pour le calcul de A^2 , ce coefficient était donné par $1 \times 1 + 1 \times 3 = 4$. Pour le calcul de $A^3 = A^2 A$, nous avons $1 \times 1 + 4 \times 3$, mais ce 4 venait lui-même du calcul précédent, c'est-à-dire $1 + (1 + 3) \times 3$, développé en $1 + 3 + 3^2 = 13$. Enfin, pour le calcul de $A^4 = A^3 A$, nous avons de même $1 \times 1 + 13 \times 3$, c'est-à-dire $1 + (1 + 3 + 3^2) \times 3 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$. Il semble donc que le coefficient (1,3)

de A^n vaille $1 + 3 + \dots + 3^n = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}$ en reconnaissant une somme de suite géométrique.

Remarquons de plus que pour $n = 0$, cette conjecture donne la matrice identité, qui correspond bien à A^0 . On peut donc étendre cette conjecture à tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Démontrons cette conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^n-1}{2} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Comme nous venons de l'annoncer, la conjecture est vraie pour $n = 0$. En effet, $A^0 = I_3$ et

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^0-1}{2} \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ et on a } A_0 = M_0.$$

Par ailleurs, les calculs menés dans les deux questions précédentes montrent que pour $n = 1, 2, 3, 4$, $A^n = M_n$ (pour le coefficient (1,3) de A et M_1 , on a bien $\frac{3^1-1}{2} = 1$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = M_n$. Montrons que $A^{n+1} = M_{n+1}$. $A^{n+1} = A^n A = M_n A$ par hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} M^n A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^n-1}{2} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + \frac{3^n-1}{2} \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times (-2) + \frac{3^n-1}{2} \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + \frac{3^n-1}{2} \times 3 \\ 0 & 0 \times 0 + (-2)^n \times (-2) + 0 \times 0 & 0 \times 1 + (-2)^n \times 0 + 0 \times 3 \\ 0 & 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 + 3^n \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + \frac{3^{n+1}-3}{2} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2+3^{n+1}-3}{2} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= M_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $A^{n+1} = M_{n+1}$ et la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3^n-1}{2} \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

On a $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 1$ et $P(-1) = (-1)^5 + 2 \times (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 - 2 \times (-1) - 1 = -1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 = 0$ donc -1 est bien une racine de P .

Pour étudier la multiplicité de cette racine, il nous faut regarder les dérivées successives de P .

$P'(X) = 5X^4 + 8X^3 + 3X^2 - 2X - 2$ et $P'(-1) = 5 - 8 + 3 + 2 - 2 = 0$.

$P''(X) = 20X^3 + 24X^2 + 6X - 2$ et $P''(-1) = -20 + 24 - 6 - 2 = -4 \neq 0$.

-1 est donc une racine double de P et on peut factoriser P par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$. Posons la division.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} X^5 & +2X^4 & +X^3 & -X^2 & -2X & -1 & X^2 & +2X & +1 \\ -X^5 & -2X^4 & -X^3 & & & & X^3 & -1 & \\ \hline & 0 & & -X^2 & -2X & -1 & & & \\ & & & +X^2 & +2X & +1 & & & \\ \hline & & & & 0 & & & & \end{array}$$

On a donc $P(X) = (X+1)^2(X^3-1)$.

On sait que les racines de X^3-1 sont les racines 3-ièmes de l'unité, à savoir 1 , $e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =: j$ et $e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} =: \bar{j}$. On a donc la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$: $P(x) = (X+1)^2(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ (puisque le coefficient dominant de P est bien 1).

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, il suffit de multiplier les termes deux à deux conjugués pour obtenir un polynôme réel. Ici, $(X-j)(X-\bar{j}) = X^2 - (j+\bar{j})X + |j|^2 = X^2 - 2\operatorname{Re}(j)X + |j|^2$. Or, $j = e^{2i\pi/3}$ donc $|j| = 1$ et $\operatorname{Re}(j) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Cela donne finalement la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (X+1)^2(X-1)(X^2+X+1)$.

Exercice 9.

1. La suite (U_n) a pour équation caractéristique $r^2 = \frac{5}{4}r - \frac{3}{8}$, dont on cherche les solutions, c'est-à-dire les racines du polynôme $X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{3}{8}$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{3}{8} = \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = \frac{25-24}{16} = \frac{1}{16} > 0$. Il admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$.

On sait alors qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = ar_1^n + br_2^n$. Pour déterminer a et b , on regarde les deux premiers termes de la suite.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} U_0 = a + b \\ U_1 = ar_1 + br_2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 6 = a + b \\ 4 = \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 6 = a + b \\ 16 = 2a + 3b \end{cases} \\ (L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1) \iff & \begin{cases} 6 = a + b \\ 4 = b \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, que l'on peut simplifier en $U_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{3^n}{4^{n-1}} = \frac{2^{n-1} + 3^n}{4^{n-1}}$.

2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $w_n = 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Les suites (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques dont les raisons sont toutes deux comprises dans l'intervalle $[0, 1[$, et de premier terme positif : elles sont donc décroissantes. La somme de deux suites décroissantes est décroissante donc (U_n) est une suite décroissante. Par ailleurs, les raisons de (v_n) et (w_n) étant dans l'intervalle $] -1, 1[$, chacune de ces suites tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, leur somme tend vers 0 : $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.