Université de Paris **2019-2020**
MI2

Devoir Maison pendant les vacances d'Avril

Il s'agit d'un devoir sur des exercices de révisions, qui ne doivent pas poser de difficultés majeures, sur tous les chapitres du cours. Vous pouvez faire une partie seulement du devoir, en fonction de vos conditions de travail durant les congés. Votre production - si vous la renvoyez - rentrera en compte dans la note de CC mais uniquement si cela vous favorise. Renvoyez alors par email à votre enseignant de TD des photos ou un scan de votre devoir - ou rédigez sur informatique si vous avez les moyens. Avant le 18 avril. Les email de vos chargés de TD sont données sur le moodle. Le Devoir peut-être fait à plusieurs, par groupes de trois ou quatre étudiants maximum. Chacun doit alors produire son propre devoir et on refusera les rédactions totalement similaires d'un devoir à l'autre (la rédaction doit vous être personnelle sinon cal n'a pas d'intérêt, ni pour vous, ni pour nous). Si vous travaillez seul, vous pouvez l'indiquer

Exercice 1. Déterminer les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 18 et la somme est 360. De même avec les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 18 et le produit est 6480.

Exercice 2. Déterminer par l'algorithme d'Euclide le PGCD de 18480 et 9828 En déduire un écriture de 84 comme combinaison linéaire à coefficients entiers de 18480 et 9828.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $955x + 183y = 2$.

Exercice 4. Trouver le reste de 100^{1000} dans la division euclidienne par 13.

Exercice 5. Mettre sous forme algébrique $a + ib$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{5+2i}{1-2i} \qquad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

Exercice 6. Calculer le module et l'argument des nombres $u = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{u}{v}$.

Exercice 7. Donner la linéarisation de $\sin^5(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Comment choisir l'entier n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un imaginaire pur ? soit un réel ?

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ et $z^3 + 3z - 2i = 0$ (on remarquera pour la deuxième que $z = i$ est une racine évidente).

Exercice 10. Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $z^2 - (2+im)z - (1+im) = 0$ admette deux racines imaginaires pures conjuguées ?

Exercice 11. (**) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$ on a

$$(z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) = z^n - 1$$

En déduire que si $z \neq 1$ on a

$$1 + z + z^2 + \cdots z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(ix) - 1 = 2i \exp(i\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + \cdots + \exp(i(n-1)x)$$

En déduire les valeurs de $X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos((n-1)x)$ et de $Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin((n-1)x)$.

Exercice 12. Calculer le déterminant et déterminer l'inverse (si c'est possible) des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

(pour la dernière on discutera suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 13. (**) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$
2) Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) A est-elle inversible ?

Exercice 14. (*) Soit m un nombre réel.
1) Calculer le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m^2-3 & 2 \end{pmatrix}$ selon les valeurs de m.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système

$$\begin{cases} x + y + z = 156 \\ 2x + my + z = 872 \\ x + (m^2-3)y + 2z = -421 \end{cases}$$

admet-il une solution unique ?
3) Calculer le déterminant de M^3 dans le cas où $m = 1$.

Exercice 15. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2.$$

On remarquera que $X = 1$ est racine du polynôme et on regardera sa multiplicité.

Exercice 16. 1) Déterminer les paramètres a et b pour que le polynôme

$$P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

soit divisible par $(X-1)^2$.
2) Même question avec $(X+1)^2$.