Devoir surveillé 1

14 février 2020

Corrigé

Exercice 1.

1. Voir 2.
2. On part du sextuplet $(600, 1, 0, 264, 0, 1)$.
   $264 \neq 0$ donc on effectue une itération de l'algorithme. $600 = \mathbf{2} \times 264 + \mathbf{72}$. Le nouveau sextuplet est $(264, 0, 1, 72, 1, -2)$.
   $72 \neq 0$ donc on effectue une itération de l'algorithme. $264 = \mathbf{3} \times 72 + \mathbf{48}$. Le nouveau sextuplet est $(72, 1, -2, 48, -3, 7)$.
   $48 \neq 0$ donc on effectue une itération de l'algorithme. $72 = \mathbf{1} \times 48 + \mathbf{24}$. Le nouveau sextuplet est $(48, -3, 7, 24, 4, -9)$.
   $24 \neq 0$ donc on effectue une itération de l'algorithme. $48 = \mathbf{2} \times 24 + \mathbf{0}$. Le nouveau sextuplet est $(24, 4, -9, 0, x, y)$.
   L'algorithme est terminé. On en déduit que $\text{pgcd}(a, b) = 24$, que $u = 4$, et $v = -9$.
3. Puisque 48 est un multiple de 24 (c'est son double), l'équation admet des solutions. D'après la question 2, une solution particulière est donc donnée par $x_0 = 2u = 8$ et $y_0 = 2v = -18$. On calcule (avec les notations du polycopié de cours) $a' = \frac{a}{d} = 25, b' = \frac{b}{d} = 11$. L'ensemble des solutions est donc $\{(8 + 11k, -18 - 25k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2.

1. $a = 12 = 2^2 \times 3$ et $b = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$.
2. $\text{pgcd}(a, b) = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$ et $\text{ppcm}(a, b) = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$.

Exercice 3.

1. $7234 = 1033 \times 7 + 3$, donc 7234 est congru à 3 modulo 7.
   $2020 = 336 \times 6 + 4$, donc 2020 est congru à 4 modulo 6.
2. $7234^{2020} \equiv 3^{2020} \pmod 7$.
   Par ailleurs, $3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $3^3 \equiv 6 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$. On en déduit immédiatement que $3^6 \equiv 1 \pmod 7$, et donc que $3^{2020} \equiv \left(3^6\right)^{336} \times 3^4 \pmod 7 \equiv 3^4 \pmod 7$. D'après les calculs précédents, $3^4 \equiv -3 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$. Le reste cherché est égal à 4.

Exercice 4.

Soient a et b deux entiers de pgcd égal à 12. Alors $a' = \frac{a}{12}$ et $b' = \frac{b}{12}$ sont premiers entre eux. Par ailleurs, puisque $a + b = 240$, on doit avoir $a' + b' = 20$. Le problème se ramène donc à trouver des entiers positifs premiers entre eux et de somme égale à 20. Les couples (a', b') sont $(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11), (11, 9), (13, 7), (17, 3)$ et $(19, 1)$. Les couples (a, b) sont donc $(12, 228), (36, 204), (84, 156), (108, 132), (132, 108), (156, 84), (204, 36), (228, 12)$.

Exercice 5.

1.

$$\begin{aligned}
(-2 + 3i)(4 + i) &= -8 - 2i + 12i + 3i^2 \\
&= -8 + 10i - 3 \\
&= -11 + 10i
\end{aligned}$$

2. $\frac{2+5i}{1-i} - \frac{2-5i}{1+i} = z - \overline{z}$ avec $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Or, en notant $z = a + ib$ sous forme algébrique, on remarque que $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\mathrm{Im}(z)$. Il suffit donc de calculer la partie imaginaire de z.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+5i}{1-i} \\ &= \frac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2+2i+5i-5}{1+1} \\ &= \frac{-3+7i}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, z est de partie imaginaire égale à $\frac{7}{2}$ le résultat cherché est $7i$.

Exercice 6.

(a) Sens direct : Soit $z \in \mathbb{R}$, alors $z = a + 0i$ avec $a \in \mathbb{R}$, et on a $\bar{z} = a - 0i = z$.
Réciproque : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = \bar{z}$, en notant $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient $a + ib = a - ib$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $a = a$ et $b = -b$. Ceci implique que $b = 0$ et donc que $z \in \mathbb{R}$.

(b) Sens direct : Soit z un imaginaire pur, alors $z = ib$ pour un $b \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\bar{z} = -ib = -z$.
Réciproque : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = -\bar{z}$, en notant $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient $a + ib = -a + ib$. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $a = -a$ et $b = b$. Ceci implique que $a = 0$ et donc que $z \in i\mathbb{R}$.