Université Paris-Diderot

L1 informatique 2018-2019

Correction de l'examen partiel du 21 mars 2019

La qualité de la rédaction comptera pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucune question ne nécessite de longs calculs.

1. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_2, -3(x_2 + x_4) \right).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

Il s'agit de vérifier que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^4$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq 4}$. On calcule

$$f(\lambda x + y) = f \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \\ \lambda x_4 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3 + \lambda x_4 + y_4 \\ -\lambda x_1 - y_1 + \lambda x_2 + y_2 - \lambda x_3 - y_3 + \lambda x_4 + y_4 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ -3(\lambda x_2 + y_2 + \lambda x_4 + y_4) \end{pmatrix},$$

et en factorisant λ dans chaque coordonnée du membre de droite:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ \lambda(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4) + (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) \\ \lambda x_2 + y_2 \\ -3\lambda(x_2 + x_4) - 3(y_2 + y_4) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_2 \\ -3(x_2 + x_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \\ y_2 \\ -3(y_2 + y_4) \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x) + f(y), \end{aligned}$$

et on a prouvé la linéarité de f .

(2) Donner une base et la dimension de $\text{Ker } f$.

Soit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \text{Ker } f$. Alors les coordonnées x_i satisfont le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ -3(x_2 + x_4) = 0, \end{cases}$$

La troisième équation donne $x_2 = 0$ et donc $x_4 = 0$ avec la quatrième équation. On se trouve donc avec un système de deux équations à deux inconnues x_1 et x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont identiques, donc on a une seule équation à deux inconnues:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Pour n'importe quelle valeur de $x_3 \in \mathbb{R}$, il suffit de choisir $x_1 = -x_3$ pour avoir une solution. Finalement, on a trouvé

$$\text{Ker } f = \{(-x_3, 0, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4, \quad x_3 \in \mathbb{R}\},$$

autrement dit

$$\text{Ker } f = \text{vect}(-1, 0, 1, 0).$$

La dimension du noyau est 1 et une base en est $\{(-1, 0, 1, 0)\}$.

(3) *Donner une base et la dimension de $\text{Im } f$.*

Par le théorème du rang, la dimension de l'image est 3. En effet,

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f,$$

et on sait par la question précédente que $\dim \text{Ker } f = 1$.

Par ailleurs, on sait que $\text{Im } f$ est générée par l'image par f de n'importe quelle base de l'espace de départ. Prenons la base canonique: on calcule:

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 0, 0),$$

$$f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 1, -3),$$

$$f(0, 0, 1, 0) = (1, -1, 0, 0),$$

$$f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 0, -3),$$

et donc

$$\text{Im } f = \text{vect}((1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, -3), (1, 1, 0, -3)).$$

La famille des trois vecteurs ci-dessus génère l'espace $\text{Im } f$ qui est de dimension 3. C'est donc une base de $\text{Im } f$.

(4) *Donner une base et la dimension d'un supplémentaire de $\text{Im } f$.*

Un supplémentaire S de $\text{Im } f$ satisfait

$$\text{Im } f \oplus S = \mathbb{R}^4,$$

et donc

$$\dim \text{Im } f + \dim S = 4,$$

et comme $\dim \text{Im } f = 3$, on a $\dim S = 1$: on cherche donc une droite vectorielle S . L'image $\text{Im } f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, et donc n'importe quel vecteur v qui n'appartient pas à l'image génère un supplémentaire de l'image.

En regardant la forme des vecteurs qui génère l'image (cf la question précédente), on devine que $v = (0, 0, 0, 1) \notin \text{Im } f$. En effet, si $v \in \text{Im } f$, alors v se décomposerait suivant la base donnée à la question précédente: on pourrait trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

ce qui donne un système de 4 équations à trois inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta + \gamma, \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma, \\ 0 = \beta, \\ 1 = -3\beta - 3\gamma, \end{cases}$$

et donc on trouve $\alpha = 0$ avec les deux premières équations, $\beta = 0$ avec la troisième, et donc $\gamma = 0$ avec la première, si bien que la quatrième équation n'est jamais satisfaite.

La conclusion est que $S = \text{vect}(0, 0, 0, 1)$ convient.

2. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit la famille

$$Q_0 = -1, \quad Q_1 = 1 + X, \quad Q_2 = 1 - X^2.$$

(1) Montrer que $\mathcal{B} = \{Q_i\}_{0 \leq i \leq 2}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note $d(P)$ le degré d'un polynôme P . On observe que $d(Q_i) = i$. Donc par un résultat du cours, la famille $(Q_i)_{0 \leq i \leq 2}$ est libre. Comme c'est une famille de trois vecteurs, et que $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Soit l'application linéaire

$$g : P \in \mathbb{R}_2[X] \rightarrow P' + P \in \mathbb{R}[X],$$

où P' est le polynôme dérivé du polynôme P . Montrer que l'image de g est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$. (On ne demande pas de vérifier la linéarité de g .)

Il s'agit de vérifier que pour tout polynôme P de degré inférieur à 2, on a $d(g(P)) \leq 2$. Comme $d(P') = d(P) - 1$, et que le degré d'une somme est inférieur au maximum des degrés, on a donc

$$d(g(P)) \leq \max(d(P'), d(P)) = d(P),$$

si bien que $d(g(P)) \leq 2$ si $d(P) \leq 2$.

- (3) Écrire $M_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g)$, la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}_2[X]$. (Cette base canonique est: $\mathcal{B}_0 = \{1, X, X^2\}$, et M_0 est écrite avec la base canonique au départ et à l'arrivée.)

On calcule

$$\begin{aligned} g(X^0) &= g(1) = 1, \\ g(X^1) &= 1 + X, \\ g(X^2) &= 2X + X^2, \end{aligned}$$

si bien que

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4) Montrer que M_0 est inversible.

Étant donné $Y \in \mathbb{R}^3$, on cherche à résoudre l'équation $M_0X = Y$, d'inconnue X . En notant $Y = (y_1, y_2, y_3)$ et $X = (x_1, x_2, x_3)$, cette équation s'écrit comme un système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1, \\ x_2 + x_3 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

On a trouvé une unique solution à l'équation $M_0X = Y$, ce qui signifie que M_0 est la matrice d'un isomorphisme, et donc une matrice inversible.

- (5) Écrire $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$, la matrice de g dans la base $\mathcal{B} = \{Q_i\}_{0 \leq i \leq 2}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. (La matrice M est écrite avec la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.)

On calcule

$$\begin{aligned} g(-1) &= -1, \\ g(1 + X) &= 2 + X, \\ g(1 - X^2) &= 1 - 2X - X^2. \end{aligned}$$

Il s'agit d'exprimer ces polynômes en fonction des Q_i . On observe sans faire de calcul que

$$g(Q_0) = Q_0, \quad g(Q_1) = 2 + X = 1 + X - (-1) = Q_1 - Q_0.$$

Puis on cherche les coordonnées de $g(Q_2)$:

$$g(Q_2) = 1 - 2X - X^2 = \alpha Q_0 + \beta Q_1 + \gamma Q_2.$$

Cela revient à

$$1 - 2X - X^2 = -\alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 - X^2),$$

et donc par identification

$$1 = -\alpha + \beta + \gamma, \quad -2 = \beta, \quad -1 = -\gamma,$$

et donc

$$\gamma = 1, \quad \beta = -2, \quad \alpha = 0.$$

On a donc obtenu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit la famille des polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$P_n = (1 - X) \cdot (1 + X^2) \cdots (1 + (-X)^{2^n}) = \prod_{0 \leq j \leq n} (1 + (-X)^{2^j}).$$

Noter que l'exposant de $(-X)$ dans le produit ci-dessus est 2^j et pas $2j$.

(1) Exprimer P_0 , P_1 , et P_2 comme des sommes de puissances de X .

On part de la formule donnée, en l'explicitant pour $n = 0$. Cela donne

$$P_0 = 1 + (-X)^{2^0} = 1 - X,$$

car $2^0 = 1$. Ensuite

$$P_1 = (1 - X)(1 + (-X)^{2^1}) = (1 - X)(1 + X^2) = 1 - X + X^2 - X^3,$$

puis

$$P_2 = (1 - X)(1 + X^2)(1 + (-X)^{2^2}) = (1 - X)(1 + X^2)(1 + X^4) = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + X^6 - X^7.$$

(2) Deviner une formule pour le degré de P_n et prouver cette formule par récurrence.

On a vu que $d(P_0) = 1$, $d(P_1) = 3$, et $d(P_2) = 7$. On remarque que

$$(1) \quad P_{n+1} = P_n \cdot (1 + (-X)^{2^{n+1}}),$$

si bien que

$$(2) \quad d(P_{n+1}) = d(P_n) + 2^{n+1}.$$

On devine donc que

$$(3) \quad d(P_n) = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k.$$

Prouvons (3) par récurrence. On a bien $d(P_0) = 2^0 = 1$: la récurrence est initialisée. Par ailleurs, si (3) est vraie, alors par (2), on a

$$d(P_{n+1}) = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k + 2^{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n+1} 2^k,$$

et la récurrence est achevée.

On peut calculer explicitement $d(P_n)$: c'est une série géométrique, et on a

$$d(P_n) = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

On vérifie que cette formule est correcte pour $n = 0$, $n = 1$, et $n = 2$.

- (3) *Deviner une formule pour P_n écrit comme une somme de puissances de X et prouver cette formule par récurrence.*

D'après les deux questions précédentes, on devine

$$(4) \quad P_n = \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j.$$

Prouvons (4) par récurrence. Pour $n = 0$, cela donne

$$P_0 = \sum_{0 \leq j \leq 1} (-1)^j X^j = 1 - X,$$

ce qui est la bonne formule: la récurrence est initialisée. Supposons maintenant (c'est l'hypothèse de récurrence) que (4) est vraie au rang n . On utilise alors (1) et l'hypothèse de récurrence:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \cdot (1 + (-X)^{2^{n+1}}) \\ &= \left(\sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j \right) (1 + (-X)^{2^{n+1}}) \end{aligned}$$

et on développe:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j + \underbrace{(-1)^{2^{n+1}}}_{=1} \cdot \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j X^{2^{n+1}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j + \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^{j+2^{n+1}} \\ &= \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1} (-1)^j X^j + \sum_{2^{n+1} \leq j \leq \underbrace{2^{n+1} + 2^{n+1} - 1}_{=2^{n+2} - 1}} \underbrace{(-1)^{j-2^{n+1}}}_{=(-1)^j} X^j \\ &= \sum_{0 \leq j \leq 2^{n+2} - 1} (-1)^j X^j, \end{aligned}$$

et la récurrence est achevée.