

Université Paris-Diderot

L1 informatique 2019-2019

Correction de l'examen partiel du 21 février 2019 - 14h-15h30

La qualité de la rédaction comptera pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y, x - z, x - z).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', \lambda y + y', \lambda x + x' - \lambda z - z', \lambda x + x' - \lambda z - z') \\ &= (\lambda(x + y + z) + (x' + y' + z'), \lambda y + y', \lambda(x - z) + (x' - z'), \lambda(x - z) + (x' - z')) \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z'), \end{aligned}$$

ce qui prouve la linéarité de f .

(2) Donner une base et la dimension de $\text{Ker } f$.

Soit $(x, y, z) \in \text{Ker } f$. Alors

$$x + y + z = 0, \quad y = 0, \quad x - z = 0,$$

c'est-à-dire

$$y = 0, \quad x = -z = z,$$

et donc

$$(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Donc le noyau de f est

$$\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

La dimension du noyau est égale à 0. Une base de $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ est l'ensemble vide.

(3) Donner une base et la dimension de $\text{Im } f$.

Par le théorème du rang:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \text{im } f.$$

Donc

$$3 = 0 + \dim \text{im } f.$$

On peut trouver une base de $\text{im } f$ par exemple en examinant l'image par f des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, l'image par f d'une base de l'espace de départ est une famille génératrice (par forcément une base) de $\text{im } f$.

Considérons la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dans laquelle f est définie. On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 1), \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 1, 0, 0), \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (1, 0, -1, -1). \end{aligned}$$

Donc l'image de f est générée par la famille

$$\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, -1)\}.$$

On pourrait vérifier directement que cette famille est libre, à partir de la définition d'une famille libre. Mais c'est une famille génératrice de 3 vecteurs dans un espace ($\text{im } f$) de dimension 3: c'est donc une base.

(On a utilisé plus haut le fait qu'une famille génératrice $\mathcal{G} \subset E$ formée de n vecteurs est automatiquement libre si l'espace E est de dimension n . En effet, si ce n'était pas le cas, alors on pourrait extraire une famille libre $\mathcal{L}$ de cette famille génératrice, de sorte que la famille $\mathcal{L}$ soit encore génératrice. La famille $\mathcal{L}$ serait alors une base, mais son cardinal est inférieur à n : contradiction. Donc la famille $\mathcal{G}$ est libre.)

(4) Donner une base et la dimension d'un supplémentaire de $\text{Im } f$.

L'image est de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$. Donc tout supplémentaire S de l'image est de dimension 1, puisque si S est un supplémentaire de $\text{im } f$, alors

$$\text{im } f \oplus S = \mathbb{R}^4,$$

et donc

$$\dim \text{im } f + \dim S = 4.$$

Comme $\text{im } f$ est de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Donc tout vecteur qui n'appartient pas à $\text{im } f$ génère un supplémentaire de $\text{im } f$. On observe que $(0, 0, 0, 1)$ n'appartient pas à l'image de f , puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la quatrième composante de $f(x, y, z)$ est égale à sa troisième composante. Donc

$$\text{Im } f \oplus \text{vec} \{(0, 0, 0, 1)\} = \mathbb{R}^4.$$

2. Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles. On considère l'ensemble $\mathcal{R}$ défini par

$$\mathcal{R} = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = 2(u_{n+1} + u_n)\}$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Soit $(u_n) \in \mathcal{R}$, $(v_n) \in \mathcal{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda(u_n) + (v_n) = (\lambda u_n + v_n).$$

Il s'agit donc de vérifier

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = 2(\lambda u_{n+1} + v_{n+1} + \lambda u_n + v_n).$$

Mais l'égalité ci-dessus est vraie, puisque

$$\lambda u_{n+2} = 2\lambda(u_{n+1} + u_n), \quad \text{et} \quad v_{n+2} = 2(v_{n+1} + v_n).$$

Donc $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

- (2) *Formuler une condition, portant sur $a \in \mathbb{R}$, pour que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartienne à $\mathcal{R}$.*

Soit (a^n) une suite qui appartient à $\mathcal{R}$. Alors

$$a^{n+2} = 2(a^{n+1} + a^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $a = 0$, alors la suite (a^n) est la suite nulle, et appartient à $\mathcal{R}$. Sinon, $a \neq 0$, et en simplifiant par a^n , on trouve

$$a^2 - 2a - 2 = 0.$$

On résout l'équation du second degré:

$$a_{\pm} = \frac{1}{2}(2 \pm (4 + 8)^{1/2}).$$

Donc on trouve

$$a \in \{0, \quad 1 - \sqrt{3}, \quad 1 + \sqrt{3}\}.$$

- (3) *Donner une base et la dimension de $\mathcal{R}$.*

Soit $U \in \mathcal{R}$ la suite définie par

$$U_0 = 1, \quad U_1 = 0, \quad U_{n+2} = 2(U_{n+1} + U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $V \in \mathcal{R}$ la suite définie par

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 1, \quad V_{n+2} = 2(V_{n+1} + V_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors pour tout $u \in \mathcal{R}$, on a

$$(1) \quad u = u_0 U + u_1 V.$$

En effet:

- pour $n = 0$:

$$u_0 = u_0 U_0 + u_1 V_0, \quad \text{car } U_0 = 1 \text{ et } V_0 = 0.$$

- pour $n = 1$:

$$u_1 = u_0 U_1 + u_1 V_1, \quad \text{car } U_1 = 0 \text{ et } V_1 = 1.$$

- supposons par récurrence avoir $u_m = u_0 U_m + u_1 V_m$ pour tout $m \leq n$, avec $n \geq 2$. Alors

$$u_{n+1} = 2(u_n + u_{n-1}),$$

et on utilise l'hypothèse de récurrence au rang n et au rang $n - 1$:

$$u_{n+1} = 2(u_0 U_n + u_1 V_n) + 2(u_0 U_{n-1} + u_1 V_{n-1}),$$

et donc

$$u_{n+1} = 2u_0(U_n + U_{n-1}) + 2u_1(V_n + V_{n-1}),$$

et par définition des suites U et V :

$$u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + 2u_1 V_{n+1},$$

ce qui achève la récurrence et donc la vérification de (1).

On vient de vérifier que la famille $\{U, V\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{R}$.

Par ailleurs, cette famille est libre car de $\lambda U + \mu V = 0$ on déduit $\lambda = 0$ en évaluant pour $n = 0$, puis on déduit $\mu = 0$ en évaluant pour $n = 1$.

Donc $\mathcal{R}$ est de dimension 2 et une base est $\{U, V\}$.

- 3.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et (e_1, e_2, e_3) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$e_1 = (1, \alpha, 0), \quad e_2 = (\alpha, \beta, 0), \quad e_3 = (\alpha, 1, \beta).$$

- (1) Donner une condition, portant sur α et β , pour que la famille (e_1, e_2, e_3) soit libre.

On se donne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_i \lambda_i e_i = 0$. C'est-à-dire

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0, \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \beta\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Premier cas: $\beta = 0$. Le système (2) devient un système de deux équations

$$\begin{cases} \lambda_1 + \alpha(\lambda_2 + \lambda_3) = 0, \\ \alpha\lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ (1 - \alpha^2)\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Si $\alpha \neq 0$, alors on a $\lambda_3 = -\alpha\lambda_1$ et $\lambda_2 = -\alpha^{-1}(1 - \alpha^2)\lambda_1$, et on trouve donc des solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, si bien que la famille n'est pas libre. Si $\alpha = 0$, alors $e_2 = 0$ et la famille n'est pas libre.

Deuxième cas: $\beta \neq 0$.

Alors $\lambda_3 = 0$ et le système (2) devient

$$\begin{cases} \lambda_1 + \alpha\lambda_2 = 0, \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

C'est l'intersection de deux droites dans $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique solution si et seulement si les deux coefficients directeurs ne sont pas égaux, c'est-à-dire

$$\beta \neq \alpha^2.$$

Donc (e_1, e_2, e_3) est libre si et seulement si

$$\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta \neq \alpha^2.$$

- (2) On suppose, dans cette question et toutes les suivantes, que la famille (e_1, e_2, e_3) est liée. Trouver e_4 , en fonction de α et β , tel que (e_1, e_2, e_4) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après la question 1, la famille (e_1, e_2, e_3) est liée signifie soit $\beta = 0$ soit $\beta = \alpha^2$.

Premier cas: $\beta = 0$. Si $\alpha = 0$ alors $e_2 = 0$ et e_2 ne peut faire partie d'aucune base. On suppose donc $\alpha \neq 0$. Alors $e_1 = (1, \alpha, 0)$, $e_2 = (\alpha, 0, 0)$ et $e_3 = (\alpha, 1, 0)$. On voit que $e_4 = (0, 0, 1)$ convient: la famille (e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième cas: $\beta \neq 0$. Alors comme (e_1, e_2, e_3) est liée, on a $\beta = \alpha^2 \neq 0$, et donc $e_2 = \alpha e_1$, et donc (e_1, e_2, e_4) est une famille liée pour tout e_4 .

Conclusion. Il est possible de trouver un tel e_4 seulement si $\beta = 0$ et alors $e_4 = (0, 0, 1)$ convient.

- (3) Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha x + \beta y + z = 0\}.$$

Donner une base de P .

On passe par une représentation paramétrique de P :

$$P = \{(x, y, -\alpha x - \beta y) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Alors $(x, y) = (1, 0)$ puis $(x, y) = (0, 1)$ donne deux vecteurs de base de P :

$$P = \text{vect} \{(1, 0, -\alpha), (0, 1, -\beta)\}.$$

La dimension de P est 2.

- (4) Donner une base de $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$.

On suppose encore que la famille (e_1, e_2, e_3) est liée. Donc $\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$ et $\beta = \alpha^2$.

Premier cas: $\beta = 0$. Alors $P = \text{vect} \{(1, 0, -\alpha), (0, 1, 0)\}$. Si $\alpha \neq 0$, alors P contient le vecteur e_4 de la question (2). Donc alors $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$. Si $\alpha = 0$, alors $P \subset \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$ et donc une base de $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$ est (e_1, e_3) .

Deuxième cas: $\beta \neq 0$. Alors $\beta = \alpha^2$ et $e_2 = \alpha e_1$. Donc $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3) = P + \text{vect}(e_1, e_3)$. Le vecteur e_1 appartient à P si et seulement si

$$\alpha + \alpha^3 = 0, \quad \alpha \neq 0,$$

qui n'a pas de solution réelle. Donc $e_1 \notin P$. Comme P est un plan dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur e_1 génère donc un supplémentaire de P . Donc $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

(5) *Calculer la dimension de $P \cap \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$.*

On peut utiliser la formule de la dimension:

$$\begin{aligned} \dim(P \cap \text{vect}(e_1, e_2, e_3)) \\ = \dim P + \dim \text{vect}(e_1, e_2, e_3) - \dim(P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3)). \end{aligned}$$

Comme on suppose encore (e_1, e_2, e_3) liée on a ici $\dim \text{vect}(e_1, e_2, e_3) = 2$. Donc

$$\dim(P \cap \text{vect}(e_1, e_2, e_3)) = 4 - \dim(P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3)).$$

On revient à la question précédente: on a vu que la somme $P + \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$ était égale à $\mathbb{R}^3$ sauf si $\alpha = \beta = 0$, auquel cas cette somme est de dimension 2.

Conclusion. Si $\alpha = \beta = 0$, alors $\dim(P \cap \text{vect}(e_1, e_2, e_3)) = 2$, et si $\beta = \alpha^2 \neq 0$, alors $\dim(P \cap \text{vect}(e_1, e_2, e_3)) = 1$.