Université Paris-Diderot

L1 informatique 2018-2019

Correction de l'examen final du 16 avril 2019

La qualité de la rédaction comptera pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucune question ne nécessite de longs calculs. Le sujet comporte une feuille recto verso.

1. *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} + \sin(x).$$

(1) *Expliquer en détail pourquoi f est continue et dérivable en $x = 1$.*

Au voisinage de $x = 1$, la fonction f est

$$f(x) = \frac{x}{1+x} + \sin(x),$$

et donc somme de fonctions infiniment dérivables en $x = 1$. Précisément, $f(1) = 1/2 + \sin(1)$, et

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{1+1} + \sin(1) = f(1),$$

donc f est continue en 1.

En posant $f_1(x) = x/(1+x) = 1 - 1/(1+x)$ et $f_2(x) = \sin(x)$, on voit que f_1 et f_2 sont dérivables en $x = 1$ avec

$$f_1'(x) = 1/(1+x)^2, \qquad f_2'(x) = \sin(x),$$

et donc f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables en $x = 1$.

(2) *Expliquer en détail pourquoi f n'est pas dérivable en $x = 0$.*

La fonction $f_2(x) = \sin(x)$ est dérivable en $x = 0$. Considérons f_1. On a $f_1(0) = 0$, et

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{f_1(x)}{x} = \underbrace{\frac{1}{1+|x|}}_{\to 1}\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\to\pm 1}, \quad \text{quand } x \to 0, \text{ pour } x \neq 0.$$

Le signe ± 1 de la limite $x/|x|$ dépend du signe de x. On voit donc que $f_1(x)/x$ a pour limite -1 quand x s'approche de zéro par valeurs négatives, et 1 quand x s'approche de zéro par valeurs positives. Donc f_1 n'est pas dérivable en zéro. Donc f n'est pas non plus dérivable en zéro, car sinon on aurait $f_1 = f - f_2$ qui serait aussi dérivable en $x = 0$.

(3) *Montrer qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0) = 1/3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x_n = 2n\pi$, on remarque que

$$f(x_n) = \frac{|x_n|}{1 + |x_n|},$$

car $\sin(2n\pi) = 0$. Quand n devient grand, x_n devient grand, et donc $f(x_n)$ s'approche de 1. En particulier, pour n assez grand, disons $n = N$, on a $f(x_N) > 3/4$. Comme $f(0) = 0$, et que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in]0, x_N[$ tel que $f(x_0) = 1/3$.

(4) *Montrer qu'il existe* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(x_1) = 0$.

Pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \cos(x).$$

En particulier, pour x assez grand, $f'(x)$ est très proche de $\cos(x)$, puisque la fonction $x \to 1/(1 + x^2)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Pour n très grand, on a donc

$$f'(x_n) = \frac{1}{1 + x_n^2} + 1 > 3/4,$$

puisque $\cos(x_n) = 1$ pour tout n. en utilisant la suite x_n de la question précédente. On a aussi

$$f'(x_n + \pi) = \frac{1}{1 + (x_n + \pi)^2} - 1 < -1/4,$$

puisque $\cos(x_n + \pi) = -1$ pour tout n. Comme f' est continue sur $]0, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_1 \in]x_n, \pi + x_n[$, pour n assez grand, tel que $f'(x_1) = 0$.

(5) *Donner l'équation de la tangente au graphe de* f *en* $x = \pi/2$.

On calcule

$$f(\pi/2) = \frac{\pi/2}{(1 + \pi/2)^2} + 1,$$

et

$$f'(\pi/2) = \frac{1}{(1 + \pi/2)^2},$$

si bien que la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$ est la droite d'équation

$$y = \Big(\frac{\pi/2}{(1 + \pi/2)^2} + 1\Big) + \Big(\frac{1}{(1 + \pi/2)^2}\Big)\Big(x - \pi/2\Big).$$

(6) *Montrer qu'il existe* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que la tangente au graphe de* f *passe par l'origine.* .

La tangente au graphe de f en z a pour équation

$$y = f(z) + f'(z)(x - z).$$

Cette tangente passe par l'origine si et seulement si

$$f(z) = zf'(z).$$

On cherche donc $z \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{|z|}{1+|z|} + \sin(z) = |z|\Big(\frac{1}{(1+|z|)^2} + \cos(z)\Big),$$
c'est-à-dire, en posant
$$G(z) = |z|\Big(\frac{1}{(1+|z|)^2} + \cos(z)\Big) - \frac{|z|}{1+|z|} + \sin(z),$$
on cherche $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que
$$G(x_2) = 0.$$
Une solution évidente est $x_2 = 0$. Il en existe beaucoup d'autres: en effet, la suite $(G(x_n))$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, et la suite $(G(x_n + \pi))$ tend vers $-\infty$ quand $n \to +\infty$. Pour n assez grand, par continuité de G et le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_2 \in]x_n, x_n + \pi[$ tel que $G(x_2) = 0$.

(7) *Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{|x|}(f(x) - \sin(x))$ est dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.*

La fonction F est
$$F(x) = \frac{\sqrt{|x|}|x|}{1+|x|}.$$
On observe que $F(0) = 0$. On cherche la limite du taux d'accroissement de F en 0 :
$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{1+|x|}\frac{\sqrt{|x|}|x|}{x}.$$
On remarque que
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|} = 1.$$
On considère l'autre terme, dont on majore la valeur absolue:
$$\left|\frac{\sqrt{|x|}|x|}{x}\right| = \sqrt{|x|} \to 0 \quad \text{quand } x \to 0.$$
Donc $F(x)/x \to 0$ quand x tend vers 0, et $F'(0) = 0$.

---

3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et (e_1, e_2, e_3) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par
$$e_1 = (1, -1, 0), \quad e_2 = (-1, \beta, 0), \quad e_3 = (-1, 1, \beta).$$

(1) *Donner une condition, portant sur β, pour que la famille (e_1, e_2, e_3) soit libre.*

On se donne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_i \lambda_i e_i = 0$. C'est-à-dire
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \beta\lambda_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Premier cas: $\beta = 0$. Le système (1) devient un système de deux équations

$$\begin{cases} \lambda_1 - (\lambda_2 + \lambda_3) = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Une solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (6, 0, 6)$. On trouve donc des solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, si bien que la famille n'est pas libre.

Deuxième cas: $\beta \neq 0$.

Alors $\lambda_3 = 0$ et le système (1) devient

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ -\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

C'est l'intersection de deux droites dans $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique solution si et seulement si les deux coefficients directeurs ne sont pas égaux, c'est-à-dire

$$\beta \neq 1.$$

Donc (e_1, e_2, e_3) est libre si et seulement si

$$\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta \neq 1.$$

(2) *On suppose, dans cette question et toutes les suivantes, que la famille* (e_1, e_2, e_3) *est liée. Trouver* e_4*, en fonction* β*, tel que* (e_1, e_2, e_4) *soit une base de* $\mathbb{R}^3$.

D'après la question 1, la famille (e_1, e_2, e_3) est liée signifie soit $\beta = 0$ soit $\beta = 1$.

Premier cas: $\beta = 0$. Alors $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 0)$ et $e_3 = (-1, 1, 0)$. On voit que $e_4 = (0, 0, 1)$ convient: la famille (e_1, e_2, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième cas: $\beta \neq 0$. Alors comme (e_1, e_2, e_3) est liée, on a $\beta = 1$, et donc $e_2 = -e_1$, et donc (e_1, e_2, e_4) est une famille liée pour tout e_4.

Conclusion. Il est possible de trouver un tel e_4 seulement si $\beta = 0$ et alors $e_4 = (0, 0, 1)$ convient.

(3) *Soit* P *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$P = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad -x + \beta y + z = 0\big\}.$$

Donner une base de P.

On passe par une représentation paramétrique de P :

$$P = \big\{(x, y, x - \beta y) \in \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\big\}.$$

Alors $(x, y) = (1, 0)$ puis $(x, y) = (0, 1)$ donne deux vecteurs de base de P :

$$P = \operatorname{vect}\{(1, 0, 1),\ (0, 1, -\beta)\}.$$

La dimension de P est 2.

(4) *Donner une base de $P + vect(e_1, e_2, e_3)$.*

On suppose encore que la famille (e_1, e_2, e_3) est liée. Donc $\beta = 0$ ou $\beta = 1$.

Premier cas: $\beta = 0$. Alors $P = \text{vect}\,\big\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\big\}$. Alors P contient le vecteur e_4 de la question (2). Donc alors $P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

Deuxième cas: $\beta \neq 0$. Alors $\beta = 1$ et $e_2 = -1e_1$. Donc $P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) = P + \text{vect}\,(e_1, e_3)$. On remarque que le vecteur e_1 n'appartient pas à P. Comme P est un plan dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur e_1 génère donc un supplémentaire de P. Donc $P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

Donc dans tous les cas $P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$, et la base canonique convient par exemple.

(5) *Calculer la dimension de $P \cap vect(e_1, e_2, e_3)$.*

On peut utiliser la formule de la dimension:

$$\begin{aligned}&\dim\big(P \cap \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)\big)\\ &\qquad = \dim P + \dim \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) - \dim\,(P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)).\end{aligned}$$

Comme on suppose encore (e_1, e_2, e_3) liée on a ici $\dim \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3) = 2$. Donc

$$\dim\big(P \cap \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)\big) = 4 - \dim\,(P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)).$$

On revient à la question précédente: on a vu que la somme $P + \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)$ était égale à $\mathbb{R}^3$. Donc $\dim\big(P \cap \text{vect}\,(e_1, e_2, e_3)\big) = 1$.

---

3. *Soit $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On pose*

$$Q_0 = 1 + X, \quad Q_1 = 1 + X^2, \quad Q_2 = 1 + X^3.$$

(1) *Donner un exemple de polynôme Q_3 tel que $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Il y a beaucoup de choix possibles. Le choix le plus simple est probablement $Q_3 = 1$. On remarque en effet que Q_i est de degré $i + 1$ (pour $i \in \{0, 1, 2\}$) et donc avec $Q_3 = 1$ la famille $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ est une famille de polynômes de degrés tous différents, donc une famille libre par un résultat du cours. Comme c'est une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(2) *On pose $Q_4 = Q_0Q_1$. La famille $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_4\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?*

On calcule

$$Q_4 = (1 + X)(1 + X^2) = 1 + X + X^2 + X^3.$$

Supposons avoir λ_i tels que

$$\sum_{0 \leq j \leq 3} \lambda_j Q_j = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_0(1+X)+\lambda_1(1+X^2)+\lambda_2(1+X^3)+\lambda_3(1+X+X^2+X^3)=0.$$

On ordonne les puissances de X pour trouver alors

$$(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_0+\lambda_3)X+(\lambda_1+\lambda_3)X^2+(\lambda_2+\lambda_3)X^3=0,$$

et donc, la famille $\{1,X,X^2,X^3\}$ étant libre,

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \\ \lambda_0+\lambda_3=0, \\ \lambda_1+\lambda_3=0, \\ \lambda_2+\lambda_3=0. \end{cases}$$

Un système équivalent est

$$\begin{cases} \lambda_2=-\lambda_3, \\ \lambda_1=-\lambda_3, \\ \lambda_0=-\lambda_3, \\ -2\lambda_3=0, \end{cases}$$

et donc l'unique solution est $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=0_{\mathbb{R}^4}$. On en conclut que $\{Q_0,Q_1,Q_2,Q_4\}$ est libre, et donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) *On définit une application linéaire $g:\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]$ par $g(P)=XP'$. Donner la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. (La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B}_0=\{1,X,X^2,X^3\}$.)*

On calcule

$$g(X^0)=g(1)=0,$$
$$g(X^1)=g(X)=X\cdot 1=X,$$
$$g(X^2)=X\cdot(2X)=2X^2,$$
$$g(X^3)=X\cdot(3X^2)=3X^3,$$

et donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(g)=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}.$$

(4) *Décrire le noyau et l'image de g.*

$\operatorname{Ker} g$ est formé des polynômes P tels que $g(P)=0$, c'est-à-dire $XP'=0$. On cherche $P\in\mathbb{R}_3[X]$ sous la forme

$$P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3,$$

et alors $XP'=0$ s'écrit

$$a_1+2a_2X+3a_3X^2=0.$$

La famille $\{1, X, X^2\}$ étant libre, cela implique $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Donc si P appartient au noyau de g, nécessairement P est de degré 0. Réciproquement, si P est de degré 0, alors $P' = 0$, et donc $g(P) = 0$.

Finalement, $\operatorname{Ker} g = \{\text{polynômes de degŕe } 0\}$, c'est une droite vectorielle engendrée par le polynôme 1.

En regardant la matrice de g, on observe que X appartient à l'image de g (cf la deuxième colonne), et aussi X^2 (cf la troisième colonne) et X^3 (cf la quatrième colonne). Donc $\operatorname{vect}(X, X^2, X^3) \subset \operatorname{Im} g$.

Par ailleurs, par le théorème du rang, on sait que

$$\dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \operatorname{Ker} g = 4 - 1 = 3.$$

Donc

$$\operatorname{vect}(X, X^2, X^3) = \operatorname{Im} g.$$

(5) *Donner la matrice de g dans la base de la question* (1).

La base de la question (1) est $\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\} = \{1 + X, 1 + X^2, 1 + x^3, 1\}$. On calcule

$$g(Q_0) = g(1 + X) = X \cdot 1 = X,$$
$$g(Q_1) = g(1 + X^2) = X \cdot (2X) = 2X^2,$$

et enfin

$$g(Q_2) = g(1 + X^3) = X \cdot (3X^2) = 3X^3,$$

puis

$$g(Q_3) = g(1) = 0.$$

Il s'agit ensuite d'exprimer les $g(Q_i)$ en fonction des Q_j. On a

$$g(Q_0) = X = 1 + X + (-1) = Q_0 - Q_3,$$

puis

$$g(Q_1) = 2X^2 = 2(1 + X^2) + (-2) = Q_1 - 2Q_3,$$

et

$$g(Q_2) = 3X^3 = 3(1 + X^3) + (-3) = Q_2 - 3Q_3,$$

si bien que

$$\mathcal{M}_{\{Q_0,Q_1,Q_2,Q_3\}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$